

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 8 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения

Под редакцией
профессора Л. Б. Шнепермана

3-е издание, переработанное

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь*

Минск «Народная асвета» 2010

Правообладатель Народная асвета

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

Авторы:

Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета имени П. М. Машерова (доктор педагогических наук, профессор *К. О. Ананченко*); учитель математики высшей категории гимназии № 50 г. Минска *З. П. Зданович*

Алгебра : учеб. пособие для 8-го кл. общеобразоват. учреждений с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова [и др.]; под ред. проф. Л. Б. Шнепермана. — 3-е изд., перераб. — Минск : Нар. асвета, 2010. — 319 с. : ил.
ISBN 978-985-03-1332-4.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-03-1332-4

© Оформление. УП «Народная асвета»,
2010

От авторов

В 8-м классе мы продолжим изучение алгебры и познакомимся с очень важными для всей математики понятиями: «неравенство», «иррациональное число», «действительное число», «квадратное уравнение», «квадратичная функция».

Как и в учебном пособии для 7-го класса, упражнения в этой книге нумеруются по главам. Число, стоящее перед точкой, обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения в этой главе. Например, 3.59 — это 59-е упражнение из 3-й главы.

Среди упражнений встречаются номера с кружком (например, 1.35°), номера со звездочкой (например, 5.21*) и номера без пометок (например, 6.58). Кружком отмечены упражнения, которые должен уметь решать каждый ученик, претендующий на отметки от 3 до 6 баллов по 10-балльной системе оценок. Все остальные упражнения предназначены для желающих углубить свои знания. Наиболее сложные из них отмечены звездочкой. Значительная часть заданий повышенного уровня сложности содержится в сборнике задач.

Пояснения к преобразованиям, которые даются по ходу решения примера (их не надо записывать в тетради), заключаются между двумя вертикальными стрелками ($\downarrow \dots \downarrow$ или $\uparrow \dots \uparrow$); направление стрелок указывает, какое именно преобразование поясняется.

Окончание доказательства утверждения отмечается светлым квадратиком с диагоналями $\boxplus$.

Материал, выделенный треугольниками $\blacktriangle$, предназначен для тех, кто собирается серьезно изучать математику.

Материал, на который следует обратить внимание, отмечен восклицательным знаком .

Весы  нарисованы там, где есть возможность сравнивать варианты доказательств, решений или их оформления.

Исторические сведения, встречающиеся в книге, выделены знаком .

Знаком  отмечены вопросы, которые приведены после каждого пункта; они помогают осмыслить и повторить новый материал, выделить в нем главное.

Материал для повторения отмечен знаком .

На форзацах и в конце учебного пособия помещены справочные материалы. В книге есть предметный указатель.

Глава 1

ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1.1. Сравнение чисел

Понятия положительного и отрицательного чисел позволяют сравнивать рациональные числа, т. е. устанавливать, что одно рациональное число больше или меньше другого.

Определим понятия «больше» и «меньше» для рациональных чисел.

Определение. Пусть a и b — рациональные числа. Говорят, что a больше b (пишут $a > b$), если разность $a - b$ положительна, и что a меньше b (пишут $a < b$), если разность $a - b$ отрицательна.

Заметим, что если $a - b = 0$, то $a = b$.

Теорема. Для чисел a и b верно одно и только одно из трех соотношений:

$$a > b, \quad a < b, \quad a = b.$$

▲ Доказательство. Разность $a - b$ либо положительна, либо отрицательна, либо равна нулю, поэтому либо $a > b$, либо $a < b$, либо $a = b$. ☒ ▲

Пример 1. Какое из двух чисел больше: $\frac{4}{9}$ или $\frac{5}{11}$?

Решение. Вычтем из числа $\frac{4}{9}$ число $\frac{5}{11}$ и определим знак этой разности:

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{11} = \frac{4 \cdot 11}{9 \cdot 11} - \frac{5 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{44 - 45}{99} = \frac{-1}{99}.$$

Получили, что разность $\frac{4}{9} - \frac{5}{11}$ — отрицательное число, значит, $\frac{4}{9} < \frac{5}{11}$.

Ответ: $\frac{5}{11}$.

Пример 2. Сравнить числа $\frac{11}{300}$ и $\frac{7}{225}$.

Решение. Рассмотрим разность этих чисел:

$$\frac{11}{300} - \frac{7}{225} = \frac{11}{5^2 \cdot 3 \cdot 2^2} - \frac{7}{5^2 \cdot 3^2} = \frac{11 \cdot 3 - 7 \cdot 4}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \frac{33 - 28}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = \frac{5}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2}.$$

Поскольку эта разность положительна, то $\frac{11}{300} > \frac{7}{225}$.

Пример 3. Доказать, что если u — любое число, а t — положительное число, то:

- а) $u + t > u$; б) $u - t < u$.

Доказательство. а) Рассмотрим разность $(u + t) - u$ и определим ее знак:

$$(u + t) - u = u + t - u = t.$$

По условию t — положительное число. Следовательно, $u + t > u$. $\square$

- б) Утверждение, что $u - t < u$, докажите самостоятельно.

Понятия «больше» и «меньше» тесно связаны:

если $a > b$, то $b < a$, и наоборот, если $b < a$, то $a > b$.

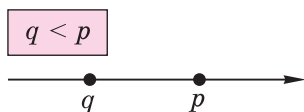


Рис. 1

Любое число изображается точкой на координатной прямой. Из двух чисел больше то, которое изображается точкой, лежащей правее (рис. 1).

Напомним, что



вместо слов «точка M с координатой a » говорят: «точка M соответствует числу a », «точка M изображает число a » или даже просто «точка a ».

Пусть a — некоторое число. Отметим штриховкой часть координатной прямой левее точки a (рис. 2). Чтобы подчеркнуть, что точка a не лежит на заштрихованной части координатной прямой, выделим эту точку светлым (незакрашенным) кружком.

Если точка x лежит на координатной прямой левее точки a , то $x < a$.

Наоборот, если $x < a$, то точка x лежит на координатной прямой левее точки a .

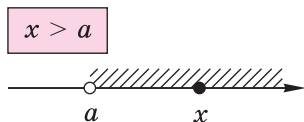


Рис. 3

На рисунке 3 штриховкой выделена часть координатной прямой правее точки a и отмечена точка x такая, что $x > a$ (точка a , выделенная светлым кружком, не лежит на заштрихованной части прямой).

А

Знаки неравенства « $<$ » и « $>$ » предложил английский математик Томас Гарриот в 1631 г. Они быстро получили всеобщее признание. Это объясняется и тем, что в типографиях использовалась латинская литера «V», с помощью которой легко было получить знаки « $<$ » и « $>$ ». Поэтому знаки неравенства сразу появились и в математических книгах тех лет.

?

1. Какое рациональное число $\frac{k}{n}$ (где k — целое число, n — натуральное) является:
 - а) положительным;
 - б) отрицательным?
2. Когда говорят, что число a больше числа b (число a меньше числа b)?
- 3*. Докажите, что для чисел a и b верно одно и только одно из трех соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.
4. Как с помощью знаков « $>$ » и « $<$ » записать утверждение:
 - а) a — положительное число;
 - б) a — отрицательное число;
 - в) $-3p$ — положительное число;
 - г) p^{-3} — отрицательное число?
5. Пусть $a < b$. Как расположены на координатной прямой относительно друг друга точки a и b ?

Упражнения

1.1°. 1) Расположите в порядке возрастания:

$$2\frac{1}{4}; -3,6; -7,1; -2,8; 1\frac{2}{9}; 2,26.$$

2) Расположите в порядке убывания:

$$(-6)^2; 3^2; (-2)^3; (-1)^2; (-1)^3; (-4)^2.$$

1.2°. Расположите в порядке возрастания:

$$1) 90 : (-15), -\frac{1}{7} : (-7) \text{ и } -7 : \left(-\frac{1}{7}\right);$$

$$2) -5(-0,8) : 4, -8(-4) : 16 \text{ и } -25(-6) : (-15).$$

1.3. Сравните значения выражений:

$$1) 15 \cdot 4 \text{ и } 231 \cdot (-0,3) \cdot 0; \quad 2) -4\left(-\frac{3}{4}\right) \text{ и } 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 0;$$

$$3) -\frac{3}{11}\left(-\frac{22}{9}\right) \text{ и } -5 \cdot 7(-2); \quad 4) 9 \cdot 2(-0,5) \cdot 3 \text{ и } 2\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7}(-3).$$

Сравните числа (1.4—1.5).

1.4°. 1) 2,7 и 2,07; 2) $\frac{1}{4}$ и 0,26; 3) -3,14 и $-\frac{22}{7}$;

4) $-\frac{5}{8}$ и -0,62; 5) $\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{11}$; 6) $-\frac{6}{7}$ и $-\frac{5}{6}$.

1.5°. 1) $\frac{17}{28}$ и $\frac{7}{34}$; 2) $\frac{13}{111}$ и $\frac{6}{11}$; 3) $\frac{11}{36}$ и $\frac{11}{48}$;

4) $\frac{10}{21}$ и $\frac{10}{49}$; 5) $\frac{2009}{2010}$ и $\frac{2010}{2011}$; 6) $\frac{2561}{2562}$ и $\frac{2562}{2563}$.

1.6. Сравните значения выражений A и B:

1) $A = 4^{-1} + (-3)^{-2}$, $B = (-6)^{-2} - 5^{-1} + 0,2 - \frac{1}{36}$;

2) $A = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} - 5^{-2} + 0,04 - \left(\frac{5}{2}\right)^3$, $B = \left(\frac{3}{8}\right)^{-2} + 3^{-3}$;

3) $A = (-0,1)^{-2} + (-0,2)^{-2}$, $B = 0,2^{-2} + 0,3^{-2}$;

4) $A = (-0,1)^{-4} - (-0,3)^{-2}$, $B = (-0,4)^{-2} + (-0,1)^{-5}$.

Сравните с нулем (1.7—1.8).

1.7°. 1) $|6|$; 2) $|-3|$; 3) $|24|$;

4) $|-7|$; 5) $|a| + 0,6$; 6) $|-a| + 3,7$.

1.8°. 1) $(-2)^{-8}$; 2) $(-3)^{-7}$; 3) $(-4,2)^{-121}$;

4) $-(-15)^0$; 5) $-1,8^0$; 6) $-15,2^{-1}$.

1.9°. Сравните с единицей:

1) $\left(\frac{10}{3}\right)^{-3}$; 2) $\left(\frac{8}{13}\right)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{9}{13}\right)^{-7}$;

4) $-(-2,6)^{-4}$; 5) $-\left(\frac{41}{23}\right)^{-3}$; 6) $-\left(\frac{16}{25}\right)^{-4}$.

1.10°. Поставьте вместо многоточия знак «>», «=» или «<» так, чтобы полученное утверждение было верным:

1) $-5\frac{2}{3} \dots -\frac{16}{3}$; 2) $-0,001 \dots -0,01$;

3) $-0,06 \dots -0,07$; 4) $-9\frac{4}{15} \dots -9\frac{8}{21}$;

5) $0,3^3 \dots 0,1^2$; 6) $0,2^2 \dots 0,4^3$.

1.11°. Докажите, что:

1) $\frac{29}{76} > \frac{11}{38}$; 2) $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$; 3) $\frac{5}{6} < \frac{9}{10}$;

4) $\frac{15}{16} < \frac{16}{17}$; 5) $-\frac{2}{7} > -\frac{3}{10}$; 6) $\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$.

1.12°. Укажите несколько значений m , при которых верно неравенство:

- 1) $m + 1 > 3$; 2) $m + 3,2 > 3,8$; 3) $m - 4 < (-1)^3$;
4) $m + 6 > (-3)^3$; 5) $m + 6 > (-3)^2$; 6) $m - 8 < -4^2$.

1.13°. Пусть $m < 0$. Верно ли, что:

- 1) $-270\,530 - m > -270\,530$; 2) $19\,104,1 + m > 19\,104,1$?

1.14°. Пусть $p > 0$. Верно ли, что:

- 1) $-80,295 + p < -80,295$; 2) $-20\,316 - p < -20\,316$?

1.15°. Сравните числа a и b , если разность $a - b$ равна:

- 1) 63,57; 2) $(-1)^{19} \cdot 6$; 3) 0^7 ; 4) $(-23)^6$.

1.16°. Сравните с нулем число c , если:

- 1) $-c > 0$; 2) $-8c < 0$; 3) $4,2c > 0$;
4) $c : (-6,1) < 0$; 5) $|-7|c > 1$; 6) $|4,5|c < -9$.

1.17. Известно, что $a > 0$, $b < 0$. Верно ли, что:

- 1) $b - a < 0$; 2) $3a - 4b > 0$; 3) $b - |a| > 0$;
4) $5b - 4|a| < 0$; 5) $4 + a + |b| > 0$; 6) $\frac{a^4 + |b|}{-b^7} > 0$?

1.18. Известно, что $a < 0$, $b > 0$. Верно ли, что:

- 1) $7a > 1$; 2) $4b < -1$; 3) $a|a| > 0$;
4) $\frac{|b|}{b} > 0$; 5) $(b^4 + 6) \cdot a < 0$; 6) $a^5 |b|^2 < 0$?

1.19. Может ли сумма чисел $p + k$ быть:

- 1) меньше p ; 2) больше k ;
3) равна $-p$; 4) равна 0?

1.20. Может ли разность чисел $x - y$ быть:

- 1) больше x ; 2) меньше y ;
3) равна y ; 4) равна $-x$?

1.21. Известно, что число m больше 5. Верно ли, что положительным числом является:

- 1) $2 - m$; 2) $m - 8$; 3) $m - 5$; 4) $5 - m$?

1.22. Сравните значения выражений

$A = (x^{-2} - x^0) : (x^{-1} + 1)$ и $B = (x^2 - 4) : (x^{-1} + 2^{-1})$ при x , равном:

- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $-\frac{2}{7}$.

1.23. Сравните значения выражений

$C = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{-2}$ и $D = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-2} \cdot \frac{(a+1)^{-3}}{a^0} \cdot \frac{5^0}{(a-1)^{-3}}$

при a , равном:

- 1) 1,3; 2) -1,3; 3) $1\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{2}{3}$.

1.24°. Укажите на координатной прямой несколько точек, координаты которых:

- 1) меньше 8; 2) больше 5;
3) больше -2,4; 4) меньше -3,2.

1.25°. 1) Отметьте на координатной прямой точки, находящиеся от точки $A(4)$ на расстоянии 5 единиц. Укажите координаты этих точек.

2) Отметьте на координатной прямой точки, находящиеся от точки $B(-7)$ на расстоянии 4 единицы. Укажите координаты этих точек.

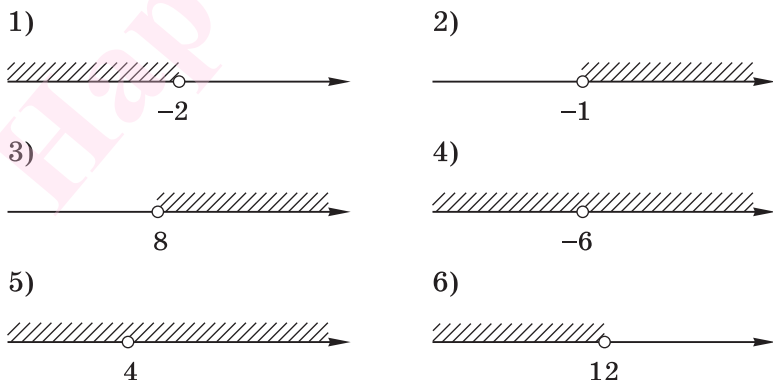
1.26°. По рисунку 4 запишите условие, которому удовлетворяет координата n точки $K(n)$, расположенной на заштрихованной части координатной прямой.

Рис. 4

1.27°. Отметьте штриховкой ту часть координатной прямой, где может лежать точка с координатой m , удовлетворяющей условию:

- 1) $m > 4$; 2) $m < 8$; 3) $m < -2$; 4) $m > -6$.

1.28°. Верно ли, что на координатной прямой точка x лежит правее точки y , если:

- 1) $y - x = -8^2$; 2) $y - x = (-5)^3$;
3) $x - y = -(-5)^2$; 4) $x - y = (-8)^2$?

1.29. Пусть $k > 0$ и $p < 0$. Выясните, правее или левее точки O (начала отсчета) на координатной прямой лежит точка, координата которой равна:

- 1) $2k - p$; 2) $4p - 2k$; 3) $k^2 p^3$; 4) $k^3 p^2$;
5) $k^5 : p^2$; 6) $k^2 p^5$; 7) $p^2 |p|^3$; 8) $p^3 |p|^2$.

1.30°. Известно, что $t > 0$. Какая из двух точек координатной прямой лежит правее:

- 1) $P(36 + t)$ или $B(36)$; 2) $K(-17 + t)$ или $T(-17)$;
3) $A(91 - t)$ или $F(91)$; 4) $C(-45 - t)$ или $E(-45)$?

1.31. Известно, что $k < 0$. Какая из двух точек координатной прямой лежит левее:

- 1) $A(p)$ или $F(p - k^5)$; 2) $A(p)$ или $M(p + 6k)$;
3) $A(p)$ или $N(p + k^6)$; 4) $A(p)$ или $T(p - k^0)$?

1.2. Числовые неравенства

Определение. Если два выражения A и B соединить одним из знаков « $<$ » или « $>$ », то полученную запись $A < B$ или $A > B$ называют *неравенством*. Выражение A называют *левой частью неравенства*, а выражение B — *правой частью*.

Неравенства $A < B$ и $C < D$ (а также $A > B$ и $C > D$) называют *неравенствами одного знака*, а неравенства $A < B$ и $C > D$ — *неравенствами разных знаков*. Знаки неравенств « $<$ » и « $>$ » называют *противоположными*.

Неравенство называется *числовым*, если каждая из его частей является числовым выражением. Числовое неравен-

ство $A < B$ называется *верным*, если значение его левой части меньше значения его правой части. Аналогично для $A > B$.

Например, $3 < 5$ и $-2 < 6$ — верные числовые неравенства одного знака, а $3 < 5$ и $6 > 4$ — верные числовые неравенства разных знаков. Неравенства

$$13 < 8; \quad -7 + 2 \cdot 5 < -9; \quad 24 > 32$$

— неверные числовые неравенства.



В этом пункте, а также в п. 1.3—1.6, формулируя свойства числовых неравенств, мы будем говорить *только о верных неравенствах*.

|| Теорема. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Доказательство. *Способ 1.* Так как $a < b$ и $b < c$, то $a - b$ и $b - c$ — отрицательные числа. Сумма отрицательных чисел является отрицательным числом, следовательно, $(a - b) + (b - c)$ — отрицательное число. Но $(a - b) + (b - c) = a - c$, поэтому $a - c$ — отрицательное число. А это означает, что $a < c$. ☒



Способ 2. Рассмотрим разность $a - c$ и определим ее знак:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

Так как по условию $a < b$ и $b < c$, то числа $a - b$ и $b - c$ отрицательные, а сумма отрицательных чисел — отрицательное число. Таким образом, $a - c < 0$, т. е. $a < c$. ☒

Теорема сформулирована для соотношения «меньше». Не составит труда переформулировать ее для соотношения «больше»:

если $c > b$ и $b > a$, то $c > a$.

Для точек на координатной прямой доказанная теорема означает, что



если точка a лежит левее точки b и точка b лежит левее точки c , то точка a лежит левее точки c (рис. 5).



Рис. 5

В этой главе теоремы будут формулироваться и доказываться только для одного из соотношений: «меньше» или «больше». А для другого соотношения вы можете сделать это самостоятельно.

Пример 1. О числах a и b известно, что $a < b$. Доказать, что:

а) если a — положительно, то и b — положительно;

б) если b — отрицательно, то и a — отрицательно.

Доказательство. а) По условию $a > 0$. Это значит, что $0 < a$. А так как $a < b$, то согласно теореме $0 < b$, т. е. $b > 0$. Другими словами, b — положительное число. $\boxtimes$

Утверждение б) доказывается аналогично.

Пример 2. Верно ли, что:

а) если $\frac{6a-7}{23a^4+1} < 0$, то $6a-7 < 0$;

б) если $(3a+16)(-a^2-3) > 0$, то $3a+16 < 0$?

Решение. а) Так как знаменатель дроби $23a^4+1$ положителен, а дробь по условию отрицательна, то числитель дроби $6a-7$ должен быть отрицательным числом, значит, $6a-7 < 0$.

б) Так как по условию произведение двух множителей положительно, а множитель $(-a^2-3)$ отрицателен, то и второй множитель должен быть отрицательным, значит, $3a+16 < 0$.

Ответ: а) верно; б) верно.

▲ **Пример 3.** Доказать, что

$$\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} < \frac{1}{5}.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие верные числовые равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5 \cdot 6} &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6}; & \frac{1}{6 \cdot 7} &= \frac{1}{6} - \frac{1}{7}; & \frac{1}{7 \cdot 8} &= \frac{1}{7} - \frac{1}{8}; \\ \frac{1}{8 \cdot 9} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{9}; & \dots; & & \frac{1}{98 \cdot 99} &= \frac{1}{98} - \frac{1}{99}. \end{aligned}$$

Сложив их почленно, т. е. сложив их левые части и сложив их правые части, получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} = \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} = \frac{1}{5} - \frac{1}{99} < \frac{1}{5}. \quad \boxtimes \quad \blacktriangle \end{aligned}$$



1. Приведите пример числового неравенства. Назовите его левую часть, правую часть.
2. Приведите примеры двух верных числовых неравенств:
а) одного знака; б) разных знаков.
3. Приведите пример неверного числового неравенства.
4. О числах a , b , c известно, что $a < b$ и $b < c$. Что можно утверждать о соотношении между a и c ?

Упражнения

1.32°. Расположите числа a , b , c , d в порядке убывания, если:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $a > b$, $c > a$, $d < b$; | 2) $a > b$, $c < b$, $d > a$; |
| 3) $a < b$, $c > b$, $d < a$; | 4) $a < b$, $a > c$, $d < c$. |

1.33. Сравните числа m и n , зная, что их разность $m - n$ равна:

- | | | |
|---------------------|--------------------|----------------------|
| 1)° $(-5)^{46}$; | 2)° $(-9)^{71}$; | 3)° $(-1,4)^{13}$; |
| 4)° $(-3,2)^{24}$; | 5) $(-3,5)^{6k}$; | 6) $(-2,9)^{8k-1}$; |
| 7) $(-1)^{2k}$; | 8) $(-1)^{2k+1}$, | |

где k — целое число.

1.34°. Известно, что числа p , k , c положительные. Верно ли числовое неравенство:

- | | | |
|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $p^2kc + 4 > 0$; | 2) $pk^2c + 5 < 0$; | 3) $pk^3c > 0$; |
| 4) $p^2kc^2 < 0$; | 5) $\frac{2c}{-7pk} < 0$; | 6) $\frac{-3pc}{5k} > 0$? |

1.35°. Известно, что числа m , n , k отрицательные. Верно ли числовое неравенство:

- | | |
|-------------------------------|--|
| 1) $mn^2k^2 - 12 < 0$; | 2) $m^6n^7k^4 < 0$; |
| 3) $\frac{4m-8}{n^3-1} > 0$; | 4) $\frac{-3n^2m+1}{-6k^4m^2-3} < 0$? |

1.36°. Верно ли, что числа m и k положительные, если:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $m > k$ и $k > 7$; | 2) $m < k$ и $k < -3$; |
| 3) $m + 1 > k$ и $k > 7$; | 4) $m - 1 < k$ и $k < -3$; |
| 5) $m + 4 > k$ и $k > 7$; | 6) $m + 6 < k$ и $k < -3$? |

1.37°. Верно ли, что число p отрицательное, если:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| 1) $p^4p^5 > 0$; | 2) $p^6p^3 < 0$; | 3) $p^7p^4 < 0$; |
| 4) $p^4 : p > 0$; | 5) $ p \cdot p < 0$; | 6) $p : p > 0$; |
| 7) $p^3(1 + p^4) < 0$; | 8) $p^5(2 + p^2) > 0$? | |

1.38°. Докажите, что:

- 1) если $k < 7$ и $p > 7$, то на координатной прямой точка k лежит левее точки p ;
- 2) если $k > -10$ и $p < -10$, то на координатной прямой точка k лежит правее точки p ;
- 3) если $k < p$ и $p < t$, то $k < t$;
- 4) если $k - 6 < p$ и $p < 0$, то $k - 6$ — отрицательное число;
- 5) если $k < p + 7$ и $k > 0$, то $p + 7$ — положительное число;
- 6) если $k^2 - 9 > k$ и $k > 1$, то $k^2 - 9 > 1$.

1.39°. Назовите две пары значений x и y , для которых выполняются следующие условия:

- 1) $x - y > 0$ и $x > 0, y > 0$;
- 2) $x - y > 0$ и $x < 0, y < 0$;
- 3) $x - y < 0$ и $x > 0, y > 0$;
- 4) $x - y < 0$ и $x > 0, y < 0$;
- 5) $x - y = 0$ и $x > 0, y > 0$;
- 6) $x - y = 0$ и $x < 0, y < 0$.

1.40°. Верно ли, что:

- 1) если $x < y$ и $y > 0$, то $x > 0$;
- 2) если $x < y$ и $y < 0$, то $x < 0$;
- 3) если $x < y$ и $x > 0$, то $y > 0$;
- 4) если $x < y$ и $x < 0$, то $y < 0$?

1.41°. Верно ли, что:

- 1) если $\frac{5k+8}{17k^2+1} > 0$, то $5k+8 > 0$;
- 2) если $\frac{9k-13}{-8k^4-19} < 0$, то $9k-13 < 0$;
- 3) если $(k+2)(5k^6+3) > 0$, то $k+2 > 0$;
- 4) если $-(10-k)(21k^2+4) < 0$, то $10-k < 0$?

1.42. Верно ли числовое неравенство:

- 1) $18^2 + 2 \cdot 18 \cdot 7 + 7^2 > 0,09 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,04$;
- 2) $6,72^2 - 3,28^2 < 2 + 4,53^2 + 5,73^2 - 2 \cdot 5,73 \cdot 4,53$;
- 3) $300,1 - (2,95^2 + 2,95 \cdot 2,5 \cdot 2 + 6,25) < 22,8^2 - 11,6^2$;
- 4) $7,98^2 - 2 \cdot 7,98 \cdot 6,58 + 6,58^2 < 5,94 \cdot 37,2^2 - 7,5^2 \cdot 5,94$?

1.43. Верно ли, что $A > B$, если:

- 1) $A = -(-5)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} - (-47,25)^0 - \left(7\frac{2}{3}\right)^3$,
 $B = -\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} - (-5)^2 - (-28,5)^0 + \left(12\frac{1}{5}\right)^2$;

$$2) A = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} + (-9)^2 + (95,5)^0 - \left(-2\frac{3}{5}\right)^2,$$

$$B = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} - (-2)^4 - (-193,8)^0 - \left(13\frac{1}{3}\right)^3?$$

1.44. Сравните значения выражений:

$$1) \frac{3^5}{7^8} : \frac{3^3}{7^7} \text{ и } \frac{8^3}{9^4} : \frac{2^8}{3^6}; \quad 2) \frac{2^5}{5} : \frac{2^4}{15} \text{ и } \frac{3^9}{4} : \frac{3^7}{8};$$

$$3) \frac{2^4}{5^3} : \frac{2^6}{5^2} \text{ и } \frac{2^5}{3^7} : \frac{2^8}{3^8}; \quad 4) \frac{3^4}{2^7} : \frac{3^3}{2^9} \text{ и } \frac{9^4}{5^6} : \frac{3^5}{5^7}.$$

1.45*. Сравните значения выражений:

$$1) A = \frac{a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3}{a^2n + amn} \text{ и } B = \frac{a - an + m - mn}{1 - 4n + 4n^2 - n^3},$$

$$\text{если } a = -0,75, m = n = -\frac{1}{3};$$

$$2) A = \frac{a^{-2} - b^{-2}}{(a-b)^{-2}} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} \text{ и } B = \frac{(a^{-2} - 1) \cdot b^{-1}}{a^{-2} - b^{-1}} + ((-a)^{-1})^{-2},$$

$$\text{если } a = -\frac{1}{2}, b = 1.$$

1.46*. Докажите, что верно утверждение:

$$1) \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{32 \cdot 35} < \frac{1}{6};$$

$$2) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10^2} > \frac{9}{22}.$$

1.3. Свойства числовых неравенств, связанные с действиями сложения и вычитания

Теорема. Если $a < b$, то $a + c < b + c$.

Доказательство. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c)$ и определим ее знак:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Так как по условию $a < b$, то $a - b$ — отрицательное число. Значит, $(a + c) - (b + c)$ — отрицательное число, и, следовательно, $a + c < b + c$. $\square$

Утверждение, что

$$\text{если } a < b, \text{ то } a - c < b - c, \quad (1)$$

докажите самостоятельно.

Эти свойства числовых неравенств формулируются так:



если к обеим частям верного числового неравенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного числового неравенства вычесть одно и то же число, то получится верное числовое неравенство того же знака.

Следствие. Если $a + k < b$, то $a < b - k$.

Это свойство формулируется так:



если в верном числовом неравенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится верное числовое неравенство того же знака.

Доказательство. Пусть $a + k < b$. Из левой и правой частей этого неравенства вычтем k . Получим верное числовое неравенство

$$(a + k) - k < b - k.$$

А так как $(a + k) - k = a$, то имеем: $a < b - k$. ☒

Пример 1. Пусть $k > t$. Сравнить числа $k - 17y^2$ и $t - 17y^2$.

Решение. По свойству числовых неравенств (1), отняв от обеих частей данного неравенства $k > t$ одно и то же число $17y^2$, получим верное числовое неравенство

$$k - 17y^2 > t - 17y^2.$$

Пример 2. Используя свойства числовых неравенств, преобразовать неравенство $(b - 4)(b + 4) < (b + 3)^2 - 5$ так, чтобы его правая часть не содержала букв.

Решение. $(b - 4)(b + 4) < (b + 3)^2 - 5$;

↓ применим формулы сокращенного умножения ↓

$$b^2 - 16 < b^2 + 6b + 9 - 5;$$

↓ по следствию из теоремы имеем ↓

$$b^2 - b^2 - 6b < 9 - 5 + 16;$$

↓ приведем подобные члены и выполним вычисления ↓

$$-6b < 20.$$



1. Сформулируйте и докажите теорему о прибавлении одного и того же числа к обеим частям числового неравенства.
2. Сформулируйте и докажите:
 - а) свойство (1) о вычитании числа из обеих частей неравенства;
 - б) следствие из теоремы.

Упражнения

- 1.47°. Запишите неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $-8 < 5$ прибавить число:
- 1) 2,9; 2) 7,2; 3) $-8,2$; 4) $-3,9$.
- 1.48°. Запишите неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $-6 < 10$ прибавить число:
- 1) $10 + y$; 2) $5 - b$; 3) $-8m$; 4) $4n$.
- 1.49°. К обеим частям неравенства $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ прибавьте число:
- 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $-2\frac{1}{4}$; 4) $3\frac{1}{5}$.
- 1.50°. Из обеих частей неравенства $-4 > -18$ вычтите число:
- 1) 3,1; 2) 2,9; 3) $-2,1$; 4) $-9,5$.
- 1.51. Из обеих частей неравенства $-12 < -6$ вычтите число:
- 1) $k + 9$; 2) $5 - t$; 3) $-8 - 7m$; 4) $-9 - 2n$.
- 1.52°. Из обеих частей неравенства $\frac{2}{7} < \frac{5}{8}$ вычтите число:
- 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-4\frac{1}{6}$; 4) $2\frac{1}{5}$.
- 1.53°. Используя свойства числовых неравенств, преобразуйте данное неравенство так, чтобы его правая часть была равна нулю:
- 1) $2a^2 - 6a + 7 > 2a^2 - 3a + 4$;
2) $7c^2 - 5(c - 2) + 3 < 11c - 4 + 7c^2$;
3) $(9 - k)(9 + k) < -19 + k^2 - 3k$;
4) $(p - 3)(p + 3) > (p + 4)(p + 3)$.
- 1.54°. Используя свойства числовых неравенств, преобразуйте данное неравенство так, чтобы его правая часть не содержала букв:
- 1) $(7 - b)^2 < (b - 3)(b + 5) + 2$;
2) $(n + 4)^2 > 1 - 6n + n^2$;

- 3) $(a^2 - 5)^2 > -10a + a^4 + 2$;
 4) $(2a + 1)(a + 1) - (a + 6)(2a - 1) < 3a(a - 1) - 3a^2$;
 5)* $2c^3 - 3 > (c - 3)(c^2 + 3c + 9)$;
 6)* $(k + 2)(k^2 - 2k + 4) < 10 + 3k^3$.

1.55. Преобразуйте данное числовое неравенство в неравенство, левая часть которого равна квадрату суммы чисел a и b :

- 1) $2ab < 13$; 2) $a^2 + 4ab > 7$; 3) $b^2 - 3ab > -4$;
 4) $a^2 + b^2 < -10$; 5) $5a^2 + b^2 < 1$; 6) $2ab - b^2 > 2$.

1.56. Преобразуйте данное числовое неравенство в неравенство, левая часть которого равна квадрату разности чисел m и n :

- 1) $6mn > 5$; 2) $m^2 - 10mn < 3$; 3) $m^2 + 5mn < -2$;
 4) $m^2 + n^2 > 8$; 5) $16n^2 + 9m^2 > 4$; 6) $n^2 + 8mn < 10$.

1.57*. Докажите, что если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то:

- 1) $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$; 2) $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$;
 3) $\frac{c-2d}{d} < \frac{a-2b}{b}$; 4) $\frac{c+6d}{d} < \frac{a+6b}{b}$.

1.58*. Пусть $b < 0$. Верно ли числовое неравенство:

- 1) $\frac{1}{2b^2 - 5b} + \frac{1}{5b + 2b^2} < \frac{4}{4b^2 - 25}$;
 2) $\frac{b^2(b^2 + 2)}{(b-1)^2} + \frac{b^2(1+b)}{1-b} < \frac{3(2b-1)}{(1-b)^2}$?

1.59*. Пусть $p > 0$. Верно ли числовое неравенство:

- 1) $\frac{p^3}{p-3} > \frac{3p}{p-3}$; 2) $\frac{16-p^2}{5-p} < \frac{10}{5-p}$;
 3) $\frac{16-p^2}{5-p} < \frac{24}{5-p}$; 4) $\frac{4p^2-5}{1-2p} > \frac{4}{2p-1}$?

1.60*. Сравните число -5 со значением выражения

$$\frac{2m}{n-2m} - \frac{n^2-6mn}{4m^2-n^2}$$

при:

- 1) $n = -1$; $m = 3$; 2) $n = 3$; $m = -1$.

1.61*. 1) Верно ли, что при $a \neq -1$ значение выражения $\frac{3a+1}{2a+2} - \frac{5a+2}{3a+3}$ отрицательно?

2) Верно ли, что при $a \neq 2$ значение выражения $\frac{2a-1}{3a-6} - \frac{a+3}{5a-10}$ положительно?

1.62*. 1) Верно ли, что при $a = -4$ значение выражения $-\frac{5a}{4a-4} + \frac{2a}{5-5a}$ меньше 1?

2) Верно ли, что при $a = 5$ значение выражения $\frac{8}{a^2-16} - \frac{2a}{a^2+4a}$ больше 1?

1.63*. Верно ли, что:

1) если $\left(\frac{3}{c} + \frac{3}{c+d}\right) \cdot \frac{c}{18(2c+d)} > 0$, то $c+d > 0$;

2) если $\left(\frac{k+6}{3k+9} - \frac{1}{k+3}\right) : \frac{k+2}{27} < 0$, то $k+2 < 0$?

1.4. Свойства числовых неравенств, связанные с действиями умножения и деления

Теорема 1. Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.

Доказательство. Так как $a < b$, то $a - b$ — отрицательное число. Умножив его на положительное число c , получим отрицательное число $(a - b)c$. Но $(a - b)c = ac - bc$. Значит, $ac - bc$ — отрицательное число, поэтому $ac < bc$. $\square$

Следствие 1. Если $a < b$ и $c > 0$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Доказательство. Число c положительное, значит, и обратное ему число $\frac{1}{c}$ положительное. Согласно теореме 1

$$a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{c}, \text{ т. е. } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}. \square$$

Доказанные свойства числовых неравенств формулируются так:



если обе части верного числового неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное числовое неравенство того же знака.

Следствие 2. Если числа a и b оба отрицательные или оба положительные и $a < b$, то

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Доказательство. Разделив обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab , получим после сокращения дробей $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Значит, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. $\square$

Теорема 2. Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

Доказательство. Так как $a < b$, то $a - b$ — отрицательное число. Умножив его на отрицательное число c , получим положительное число $(a - b)c$. Но $(a - b)c = ac - bc$. Значит, $ac - bc$ — положительное число, поэтому $ac > bc$. $\square$

Следствие 3. Если $a < b$ и $c < 0$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Докажите следствие 3 самостоятельно.

Эти свойства числовых неравенств формулируются так:



если обе части верного числового неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и заменить знак неравенства на противоположный, то получится верное числовое неравенство.



▲ Докажите теоремы 1, 2 и следствия из них, сразу рассматривая разность соответствующих выражений и определяя ее знак. ▲

Пример 1. Обе части неравенства $-2 < 13$ умножить на число z и записать результат.

Ответ: $-2z < 13z$, если $z > 0$; $-2z = 13z$, если $z = 0$;
 $-2z > 13z$, если $z < 0$.

Пример 2. Пусть $p < c$. Разделить обе части неравенства $(p - c)^7 < (p - c)^6$ на:

а) $(p - c)^5$; б) $(p - c)^6$.

Решение. а) Так как $p - c < 0$ (поясните почему) и 5 — нечетное число, то $(p - c)^5 < 0$. По условию $(p - c)^7 < (p - c)^6$.

По свойству неравенств, разделив обе части неравенства на отрицательное число $(p - c)^5$, получим $(p - c)^2 > p - c$.

(Обратите внимание, что знак неравенства изменился.)

б) Так как $p - c < 0$ (поясните почему) и 6 — четное число, то $(p - c)^6 > 0$. По условию

$$(p - c)^7 < (p - c)^6.$$

По свойству неравенств, разделив обе части неравенства на положительное число $(p - c)^6$, получим

$$p - c < 1.$$



1. Сформулируйте и докажите свойства умножения (деления) обеих частей числового неравенства на положительное число.
2. Сформулируйте и докажите свойства умножения (деления) обеих частей числового неравенства на отрицательное число.
- 3*. Докажите теоремы 1, 2 и следствия из них двумя способами.

Упражнения

1.64°. Запишите неравенства, которые получаются, если обе части неравенства:

- 1) $-14 < -3$ умножить на 5, на 10, на -3 , на -1 ;
- 2) $8 > -14$ разделить на 2, на 3, на -4 , на -1 ;
- 3) $\frac{2}{9} < 1$ умножить на 3, на 6, на -9 , на -1 ;
- 4) $-1 < 2\frac{1}{3}$ разделить на 2, на 3, на -6 , на -1 .

1.65°. Умножьте обе части неравенства:

- 1) $29 > -4$ на 3;
- 2) $-3,2 < 5,1$ на 4;
- 3) $-4,8 < 1,7$ на -3 ;
- 4) $-1,3 < -0,7$ на -11 ;
- 5) $4p < 5k$ на $\frac{3}{4}$;
- 6) $5a^3 > \frac{1}{4}b^3$ на $-\frac{2}{5}$.

1.66°. Разделите обе части неравенства:

- 1) $-9 < 3$ на 0,3;
- 2) $2,7 > -1,8$ на 9;
- 3) $-64 < -16$ на -8 ;
- 4) $-4,9 > -5,6$ на -7 ;
- 5) $-1,21b < 33t$ на -11 ;
- 6) $-\frac{5a}{36} < \frac{n}{30}$ на $-\frac{1}{6}$.

1.67. Разделите обе части неравенства:

- 1) $p^3 < p^2$ на $-p^2$;
- 2) $p^5 > p^4$ на $-p^4$;
- 3) $p^3 + 2p < -2p^2 - 4$ на $p^2 + 2$;
- 4) $p^3 + p < 2p^2 + 2$ на $p^2 + 1$.

1.68. Зная, что $a > b$, разделите обе части неравенства на число $a - b$:

- 1) $a^2 - b^2 > 3a - 3b$; 2) $a^2 - 2ab + b^2 > 2a^2 - 2b^2$;
 3)* $a^3 - b^3 > (a - b)^2$; 4)* $(a - b)^3 < a^3 - b^3$.

1.69. Зная, что $a < b$, разделите обе части неравенства на число $a - b$:

- 1) $a^2 - ab > 5ab - 5b^2$; 2) $a^2 + b^2 - 2ab > 6a^2b^2 - b$;
 3) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 > (a - b)^2$; 4) $a^2 - 2ab + b^2 < 24a^2 - 24b^2$.

1.70. Известно, что $c^5 > c^7$ и $c < 0$. Верно ли, что:

- 1) $c^5 > c^6$; 2) $c^4 > c^5$; 3) $c^3 < c^4$;
 4) $c^2 < c^3$; 5) $c > c^2$; 6) $-1 > c$?

1.71. Известно, что $a^4 < a^3$ и $a > 0$. Верно ли, что:

- 1) $a^8 > a^7$; 2) $a^2 > a^3$; 3) $a^6 < a^5$;
 4) $a^6 < a^7$; 5) $a < a^2$; 6) $1 < a$?

1.72. Известно, что $(p - k)^5 < (p - k)^3$ и $p < k$. Верно ли, что:

- 1) $(p - k)^4 > (p - k)^3$; 2) $(p - k)^3 > (p - k)^2$;
 3) $(p - k)^2 < p - k$; 4) $p - k < -1$?

1.73. Известно, что $a > b$. Верно ли неравенство:

- 1) $-4a < -4b$; 2) $\frac{a}{13} > \frac{b}{13}$;
 3) $5a - 11 > 5b - 11$; 4) $3,2a + 4 > 3,2b + 4$;
 5) $6 - 3,2a < 6 - 3,2b$; 6) $0,1 - 9a < 0,1 - 9b$?

1.74°. Сравните число t с нулем, если:

- 1) $5t < 7t$; 2) $2t > 11t$; 3) $-8t < 8t$;
 4) $-6t > -2t$; 5) $7t < 3t$; 6) $4t > t$;
 7) $-6t > -9t$; 8) $-13t > 7t$.

1.75. Зная, что $m > n$, $n > 0$, сравните числа:

- 1) $-m$ и $-n$; 2) $-m - 5$ и $-n - 5$;
 3) $4 - m$ и $4 - n$; 4) $-\frac{m}{3}$ и $-\frac{n}{3}$;
 5) $\frac{7}{m}$ и $\frac{7}{n}$; 6) $\frac{1}{m} + 4$ и $\frac{1}{n} + 4$.

1.76. 1) Зная, что $m > n$, $p < n$, $m < 0$, расположите числа $\frac{1}{m}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{p}$ в порядке возрастания.

2) Зная, что $m < n$, $p > n$, $k < m$, $k > 0$, расположите числа $\frac{1}{m}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{k}$ в порядке убывания.

1.77. Верно ли, что значение выражения:

1) $\frac{25a^2}{3a-a^2} \cdot \frac{a^2-9}{5a}$ больше 6 при $a = -5$;

2) $\frac{a}{a^2+4+4a} \cdot (4-a^2)$ меньше 0 при $a = -1,5$;

3) $\left(\frac{2}{a^2-6a} + \frac{1}{2a+8} + \frac{5}{a^2-2a-24}\right) : \frac{4a+a^2}{2a-12}$ меньше 0,3 при $a = -2$;

4) $\left(\frac{1}{a+2} + \frac{9}{2a^2-a-10} + \frac{8}{2a^2-5a}\right) : \left(\frac{52}{a+4} + 2a-13\right)$ больше 2 при $a = 1,7$;

5)* $\left(2a - \frac{4a+1}{1-2a}\right) \cdot \left(\frac{2a}{2a-1} - \frac{8a}{4a^2+2a+1} - \frac{4a+1}{8a^3-1}\right)$ меньше 20 при $a = 17,5$;

6)* $\left(\frac{25}{a^2+5a+25} - \frac{2a}{5-a} - \frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right) \cdot \left(a-5 + \frac{15a}{a-5}\right)$ больше -10 при $a = -4$;

7)* $\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a^2}{a^3+8} \cdot \frac{a^2-2a+4}{a-2}\right) : \frac{8}{a^2-4a+4} - \frac{a^2+a+6}{4a+8}$ больше -1 при $a = 2,93$;

8)* $\left(\frac{2b^2}{8b^3-1} \cdot \frac{4b^2+2b+1}{2b+1} - \frac{b}{2b+1}\right) : \frac{b}{8b^2+8b+2} - \frac{8(b+1)}{6b-3}$ больше 1 при $b = -1,27$?

1.78. Докажите, что при любом допустимом значении a значение выражения:

1) $\left(\frac{a+1}{4a^2-1} + \frac{1}{2-4a}\right)^2 \cdot \frac{16a^4+1-8a^2}{8} + 1$ больше 0;

2) $\left(\frac{a+1}{2(a-1)} + \frac{6}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$ больше 2;

3) $\left(\frac{a}{a^2-4} + \frac{2}{2-a} + \frac{1}{a+2}\right) : \left(a-2 + \frac{10-a^2}{a+2}\right) - \frac{a-1}{2-a}$ меньше 2;

$$4) \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1} \right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4}{a^2-1} \right) \text{ больше } 3;$$

$$5)^* \left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1} \right) \cdot \left(a - \frac{2a-1}{a+3} \right) \text{ больше } -2;$$

$$6)^* \left(\frac{3}{8a^3+1} - \frac{3}{4a^2-2a+1} \right) \cdot \frac{4a^3-2a^2+a}{a+1} + \frac{5a+1}{3a+1} \text{ больше } 0;$$

$$7)^* \frac{8-a^3}{2+a} : \left(2 + \frac{a^2}{2+a} \right) - \frac{a^2}{a-2} \cdot \frac{4-a^2}{a^2+2a} \text{ меньше } 3;$$

$$8)^* \left(\frac{1}{2-6a} + \frac{1}{27a^3-1} : \frac{1+3a}{1+3a+9a^2} \right) \cdot \frac{2+6a}{a-1} \text{ больше } 5.$$

1.5. Сложение и умножение числовых неравенств

Теорема 1. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доказательство. Согласно теореме п. 1.3 из неравенства $a < b$ следует, что $a + c < b + c$.

Аналогично из $c < d$ следует, что $b + c < b + d$.

Так как $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$, то согласно теореме п. 1.2 имеем $a + c < b + d$. ☐

Это свойство числовых неравенств формулируется так:



если сложить два верных числовых неравенства одного знака, то получится верное числовое неравенство того же знака.

При сложении неравенств мы складываем их левые части и складываем их правые части (говорят еще «складываем неравенства почленно»).

Пример 1. Сложить неравенства:

а) $-1 < 15$ и $-15 < -1$;

б) $23 > 22$ и $-25 > -26$.

Решение.

$$\begin{array}{r} \text{а)} \quad \begin{array}{r} + \quad -1 < 15 \\ -15 < -1 \\ \hline -1 + (-15) < 15 + (-1), \\ -16 < 14; \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б)} \quad \begin{array}{r} + \quad 23 > 22 \\ -25 > -26 \\ \hline 23 + (-25) > 22 + (-26), \\ -2 > -4. \end{array} \end{array}$$

Теорема 2. Если $a < b$, $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$.

Доказательство. *Способ 1.* Согласно теореме 1 п. 1.4 из неравенства $a < b$ следует, что $ac < bc$. Аналогично из $c < d$ следует, что $bc < bd$. Так как $ac < bc$ и $bc < bd$, то согласно теореме п. 1.2 имеем $ac < bd$. ☒



▲ *Способ 2.* Рассмотрим разность выражений ac и bd . Прибавив и отняв выражение bc , получим:

$$ac - bd = ac - bd + bc - bc = (ac - bc) + (bc - bd) = \\ = c(a - b) + b(c - d) < 0,$$

поскольку по условию теоремы $a - b < 0$, $c - d < 0$, $c > 0$, $b > 0$. Значит, по определению понятия «меньше» получим, что $ac < bd$. ☒

Рассуждая аналогично, докажите теорему 1 способом 2. ▲

Это свойство числовых неравенств формулируется так:



если умножить два верных числовых неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное числовое неравенство того же знака.

При умножении неравенств мы умножаем их левые части и умножаем их правые части (говорят еще «умножаем неравенства почленно»).

Пример 2. Умножить числовые неравенства:

- а) $3 < 5$ и $7 < 8$; б) $21 > 5$ и $10 > 3$.

Решение.

$$\begin{array}{r} \text{а) } \begin{array}{r} 3 < 5 \\ \times 7 < 8 \\ \hline 3 \cdot 7 < 5 \cdot 8, \\ 21 < 40; \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \begin{array}{r} 21 > 5 \\ \times 10 > 3 \\ \hline 21 \cdot 10 > 5 \cdot 3, \\ 210 > 15. \end{array} \end{array}$$

Но почему в теореме требуется, чтобы a, b, c, d были положительными числами? Если отказаться от этого требования, то неравенство $ac < bd$ может оказаться как верным, так и неверным.

Действительно:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \quad \begin{array}{r} \times \quad -3 < 5 \\ \quad -7 < -2 \\ \hline -3 \cdot (-7) < 5 \cdot (-2), \\ 21 < -10 \text{ — неверно;} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \quad \begin{array}{r} \times \quad -3 < 2 \\ \quad -7 < 13 \\ \hline -3 \cdot (-7) < 2 \cdot 13, \\ 21 < 26 \text{ — верно;} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{в) } \quad \begin{array}{r} \times \quad -3 < -2 \\ \quad -7 < 5 \\ \hline -3 \cdot (-7) < -2 \cdot 5, \\ 21 < -10 \text{ — неверно;} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{г) } \quad \begin{array}{r} \times \quad -7 < -3 \\ \quad 14 < 21 \\ \hline -7 \cdot 14 < -3 \cdot 21, \\ -98 < -61 \text{ — верно.} \end{array} \end{array}$$

Следствие. Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $a^n < b^n$ при любом натуральном n .

В самом деле, если неравенство $a < b$ умножить на неравенство $a < b$, то на основании теоремы 2 получится верное числовое неравенство

$$a \cdot a < b \cdot b, \text{ т. е. } a^2 < b^2.$$

Точно так же, если верное числовое неравенство $a^2 < b^2$ умножить на верное числовое неравенство $a < b$, то получится верное числовое неравенство $a^3 < b^3$.

Таким же способом можно установить, что при любом натуральном n будет верным неравенство $a^n < b^n$.

Пример 3. Доказать неравенство

$$p^2 + 3p > 10 \text{ при } p > 2.$$

Доказательство. При условии $p > 2$ будут верными и неравенства $3p > 6$ и $p^2 > 4$. Сложив эти два неравенства, получим верное неравенство

$$p^2 + 3p > 10. \quad \square$$



1. Сформулируйте и докажите теорему:

- а) о сложении числовых неравенств;
- б) об умножении числовых неравенств.

2. Докажите, что если m и k — положительные числа и $m > k$, то:

- а) $m^2 > k^2$; б) $m^3 > k^3$;
- в) $m^5 > k^5$; г) $m^8 > k^8$.

Упражнения

1.79°. Сложите неравенства, используя теорему о сложении неравенств:

1) $3 < 4$ и $12 < 15$; 2) $4,2 < 6,3$ и $5 < 10$;

3) $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ и $2 < 5$; 4) $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ и $10 > 6$.

1.80°. Умножьте неравенства, указанные в упражнении 1.79, используя теорему об умножении числовых неравенств.

1.81°. Сложите неравенства:

1) $4 > -3$ и $4 > 3$; 2) $-7 > -9$ и $6 > 3$;

3) $4 < 9$ и $-3 < 6$; 4) $5 > 2$ и $-3 > -6$;

5) $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$; 6) $\frac{2}{7} < \frac{3}{8}$ и $\frac{7}{12} < \frac{3}{4}$;

7) $0 < 1$ и $-\frac{1}{8} < -\frac{1}{12}$; 8) $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{9}$ и $-1 < 0$.

1.82°. Умножьте неравенства:

1) $3 > 2$ и $8 > 5$; 2) $7 < 9$ и $11 < 13$;

3) $3\frac{2}{5} > 2\frac{1}{4}$ и $20 > 16$; 4) $9\frac{3}{4} > 8\frac{1}{3}$ и $6 > 4$;

5) $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3} < 1$; 6) $\frac{1}{9} < \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4} < 2$;

7) $0,6 > 0,4$ и $0,1 > 0,01$; 8) $0,02 > 0,002$ и $0,7 > 0,3$.

1.83°. Сложите неравенства:

1) $4 < 5^2$ и $4^2 < 5^3$; 2) $4 < 3^2$ и $\frac{1}{4^3} < \frac{1}{3^3}$;

3) $8 > 6$ и $\frac{1}{6^2} > \frac{1}{10^2}$; 4) $\frac{1}{6^3} < \frac{1}{8^2}$ и $2^2 < 3^2$;

5) $3 < 4^2$ и $3^2 < 4^3$; 6) $2^3 \cdot 3^3 > 5^2$ и $2^3 > 4$;

7) $4^2 > 6$ и $\frac{1}{4^3} > \frac{1}{6^2}$; 8) $13^2 > 7^2$ и $\frac{1}{13^2} > \frac{1}{7^3}$.

1.84°. Умножьте неравенства из упражнения 1.83.

1.85°. Верно ли, что:

- 1) если $a > 5$ и $b > 2$, то $a + b > 7$ и $ab > 10$;
- 2) если $a > 2$ и $b > 1,5$, то $a + b > 4,5$ и $ab > 0,3$;
- 3) если $a < 2$ и $b < -3$, то $ab < -6$;
- 4) если $a < -2$ и $b < -3$, то $ab < 6$?

1.86°. Сложите неравенства:

- 1) $k + 4 > k$ и $6 > k$ ($k > 0$);
- 2) $p < p + 5$ и $p < 2$ ($p > 0$);
- 3) $y^2 > x + 1$ и $y^2 - 3 > 5x$ ($x > 0$);
- 4) $a^2 - 3 > 4b^2$ и $2a + 3a^2 > 5$ ($a > 2$).

1.87. Умножьте неравенства из упражнения 1.86.

1.88. Пусть $A > B$ и $C > D$ — верные числовые неравенства. Запишите эти неравенства и сложите их, если:

- 1) $A = 18a^2c - 27ab$; $B = 10x^2 + 10xy$;
 $C = 14a^2c - 21ab$; $D = 5x^2 + 5xy$;
- 2) $A = 35ax^2 - 20ay$; $B = 48xy^2 - 15x^2y^3$;
 $C = 24ay - 42ax^2$; $D = 32xy^2 - 10x^2y^3$.

1.89. Сложите неравенства:

- 1) $a^2 + b^2 > 2a$ и $2ab > 3a$;
- 2) $k^2 - 2kp < 3 + p$ и $p^2 < 1 - p$;
- 3) $x^2 - 3xy + x > y^2$ и $3xy - x - y^2 > 5$;
- 4) $c^4 - 4c^2 < 5 - 3d$ и $4c^2 - d^2 < 6d$;
- 5) $4a^2 < b^2 + 2$ и $2a - 3a^2 < b - 2$;
- 6) $a^2 > b + 1$ и $2a > b - 5$.

1.90. Пусть $A > B$ и $C > D$ — верные числовые неравенства, B, D — положительны. Умножьте эти неравенства, если:

- 1) $A = \frac{ab - b^2}{b^4}$; $B = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^7}$; $C = \frac{b^5}{a^2 - b^2}$; $D = \frac{a^8}{a - b}$;
- 2) $A = \frac{a^2 - 4b^2}{0,2ab}$; $B = \frac{3b - 2a}{8a^6}$; $C = \frac{12a^2b^3}{a + 2b}$; $D = \frac{32a^8}{4a^2 - 9b^2}$.

1.91. Докажите, что если $p > 3$ и $k > 6$, то:

- 1) $4p + 3k > 30$; 2) $pk - 3 > 15$;
- 3) $p^2 + k^2 > 45$; 4) $p^3 + k^3 > 243$.

1.92. Пусть $m > 0$, $k > 0$, $m > k$. Докажите, что:

- 1) $m^2 > k^2$; 2) $m^3 > k^3$; 3) $m^5 > k^5$;
4) $\frac{1}{m^2} < \frac{1}{k^2}$; 5) $\frac{1}{m^3} < \frac{1}{k^3}$; 6) $\frac{1}{m^5} < \frac{1}{k^5}$.

1.93. Пусть $p > 1$. Докажите, что:

- 1) $p^2 > p$; 2) $p^3 > p^2$; 3) $p^4 > p^3$;
4) $p^3 > p$; 5) $p^{k+1} > p^k$, $k > 1$; 6) $p^k > p$, $k > 1$.

1.94. Пусть $m < 1$ и $m > 0$. Докажите, что:

- 1) $m^2 < m$; 2) $m^3 < m^2$; 3) $m^4 < m^3$; 4) $m^3 < m$.

1.6. Строгие и нестрогие неравенства

До сих пор мы изучали неравенства со знаками « $>$ » и « $<$ », т. е. неравенства вида $A > B$ и $A < B$.

Такие неравенства называются *строгими*.

Наряду со строгими неравенствами будем рассматривать также и *нестрогие* неравенства: $A \geq B$ и $A \leq B$.

Знак « $\geq$ » читается «*больше или равно*», или «*не меньше*», а знак « $\leq$ » читается «*меньше или равно*», или «*не больше*». Например, неравенство « $3 \leq 5$ » читается так: «3 меньше или равно 5», либо «3 не больше 5».



Числовое неравенство $A \leq B$ верно, когда верно неравенство $A < B$ или верно равенство $A = B$. Аналогично для $A \geq B$.

Приведем еще примеры нестрогих неравенств:

- а) $2 \geq 1$; б) $2 \geq 2$; в) $2 \leq 2$; г) $a^2 \geq 0$ (a — число).

Рассмотрим неравенство а). Оно верное. Действительно, неравенство $2 \geq 1$ означает, что или $2 > 1$, или $2 = 1$. Так как верно, что $2 > 1$, то неравенство $2 \geq 1$ — верное. Верными являются и неравенства б), в), г) (поясните почему). А, например, неравенства $2 \geq 3$ и $a^2 + 1 \leq 0$ (a — число) неверные (объясните почему).

Все свойства строгих числовых неравенств, рассмотренные в предыдущих пунктах, верны и для нестрогих числовых неравенств. Их нетрудно доказать. Укажем эти свойства.

1. Если $a \leq b$, то $b \geq a$.
2. а) Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.
б) Если $a \leq b$ и $b < c$, то $a < c$.
3. Если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$.
4. Если $a \leq b$ и $c > 0$, то $ac \leq bc$.
5. Если $a \leq b$ и $c < 0$, то $ac \geq bc$.
6. а) Если $a \leq b$ и $c \leq d$, то $a + c \leq b + d$.
б) Если $a \leq b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.
7. а) Если $a \leq b$, $c \leq d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac \leq bd$.
б) Если $a \leq b$, $c < d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$.
8. Если $a \leq b$ и числа a, b — оба отрицательные или оба положительные, то $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
9. Если $a > 0$, $b > 0$, $a \geq b$, то $a^n \geq b^n$ при любом натуральном n .

Пример 1. Сложить неравенства

$$m + n \geq 5 \text{ и } 2m - 9n > 7.$$

Решение. По свойству 6 б), складывая данные неравенства, получим:

$$\begin{array}{r} m + n \geq 5 \\ + \quad 2m - 9n > 7 \\ \hline m + 2m + n - 9n > 5 + 7, \\ 3m - 8n > 12. \end{array}$$

Пример 2. Умножить неравенства $p \geq 9$ и $p + 2 \geq p$.

Решение. Так как $p \geq 9$, то $p + 2$ и p — положительные числа, поэтому при умножении этих неравенств (см. свойство 7 а)) получим

$$p^2 + 2p \geq 9p.$$

Пример 3*. Пусть $m < t$. Верно ли, что:

- а) $m + 5 \leq t + 5$; б) $m + t \geq m + t$; в) $-7m \leq -7t$?

Решение. а) По условию $m < t$, значит, согласно теореме п. 1.3 верно неравенство $m + 5 < t + 5$, а значит, и неравенство $m + 5 \leq t + 5$ (поясните почему).

б) Так как $m + t = m + t$, то $m + t \geq m + t$.

в) По условию $m < t$, значит, согласно теореме 2 п. 1.4 верно неравенство $-7m > -7t$, и, следовательно, неравенство $-7m \leq -7t$ — неверно.

Ответ: а) верно; б) верно; в) неверно.

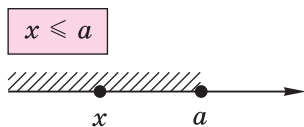


Рис. 6

Пусть a — некоторое число. Отметим штриховкой часть координатной прямой левее точки a вместе с точкой a (рис. 6). Чтобы подчеркнуть, что точка a лежит на заштрихованной части координатной

прямой, выделим эту точку черным (закрашенным) кружком.

Если точка с координатой x лежит на координатной прямой левее точки a или совпадает с ней, то $x \leq a$.

Наоборот, если $x \leq a$, то точка x лежит на координатной прямой левее точки a или совпадает с ней.

На рисунке 7 штриховкой выделена часть координатной прямой правее точки a вместе с точкой a и отмечена точка x такая, что $x \geq a$ (точка a , выделенная черным (закрашенным) кружком, лежит на заштрихованной части координатной прямой).

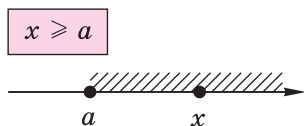


Рис. 7



1. Как читаются знаки « $\leq$ » и « $\geq$ »?
2. Какие неравенства называются строгими? Приведите пример.
3. Какие неравенства называются нестрогими? Приведите пример.
4. Когда числовое неравенство $A \geq B$ верно?
5. Верно ли неравенство: а) $a \geq a$; б) $a < a$?
- 6*. Докажите свойства нестрогих числовых неравенств 1—9.

Упражнения

1.95°. Запишите, используя знаки неравенства, предложение:

- 1) Сегодня температура (t) воздуха не ниже 5°C .
- 2) Температура (t) воды в жидком состоянии не меньше 0°C .
- 3) Относительная влажность (φ) воздуха в космическом корабле не больше 60% .
- 4) Количество (n) озер и рек в системе Браславских озер не меньше 50.

- 5) Расстояние (l) между любыми двумя точками на границе Беларуси не превышает 1000 км.
 6) Оценка (n) за выступление в фигурном катании не превышает 6 баллов.

1.96°. Прочитайте неравенство:

- 1) $0 \leq 3$; 2) $4 \geq 3$; 3) $14 \geq 14$;
 4) $-6 \leq -9$; 5) $0 \leq 10$; 6) $n \leq -2$;
 7) $x \leq -7$; 8) $-5,2 \geq a$; 9) $-3,4 \geq -6,8m$.

1.97. По рисунку 8 запишите условие, которому удовлетворяет координата n точки $K(n)$, лежащей на заштрихованной части координатной прямой.

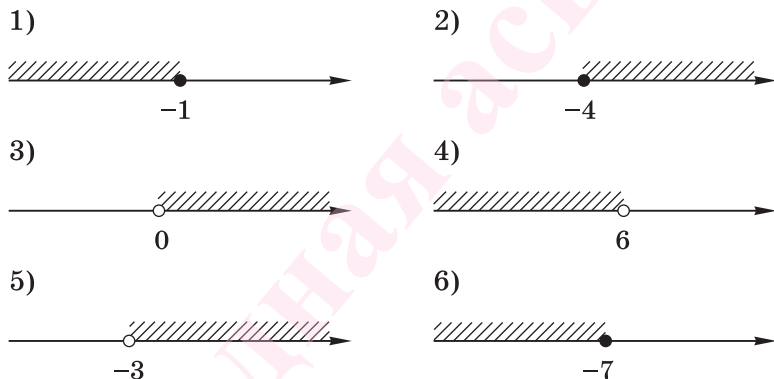


Рис. 8

1.98. Отметьте штриховкой ту часть координатной прямой, где может лежать точка с координатой m , удовлетворяющей условию:

- 1) $m \geq 4$; 2) $m \leq 8$; 3) $m \leq -2$; 4) $m \geq -6$.

1.99°. Запишите в виде нестрогого неравенства:

- 1) $a < b$ или $a = b$;
 2) $c > d$ или $c = d$;
 3) $a + b < 2$ или $a + b = 2$;
 4) $m - n > t$ или $m - n = t$;
 5) $a^2 + b^2 > 2ab$ или $a^2 + b^2 = 2ab$;
 6) $(a - b)^2 > 0$ или $(a - b)^2 = 0$.

1.100°. Верно ли неравенство:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------|
| 1) $2 \leq 5$; | 2) $-2 \geq 0$; | 3) $5 \geq 5$; |
| 4) $6 \leq 6$; | 5) $49 \leq 40$; | 6) $15 \leq 19$; |
| 7) $k + 2 \leq k + 2$; | 8) $p - 3 \geq p - 3$? | |

1.101°. Сложите неравенства:

- | | |
|---|---|
| 1) $2 \geq -1$ и $3 \geq 3$; | 2) $7 \leq 7$ и $-10 \leq -5$; |
| 3) $k \leq 2$ и $-8 \leq p$; | 4) $k \geq 5$ и $-5 \geq p$; |
| 5) $m \leq \frac{1}{9}$ и $\frac{1}{3} \leq 2m$; | 6) $m \geq \frac{4}{7}$ и $-\frac{3}{14} \geq 4m$. |

1.102°. Умножьте неравенства:

- | | |
|--|--|
| 1) $2 \geq 1$ и $5 \geq 5$; | 2) $3 \leq 3$ и $2 \leq 8$; |
| 3) $k \geq 2$ и $p \geq \frac{1}{2}$; | 4) $k \leq 2,1$ и $\frac{1}{3} \leq p$; |
| 5) $m + 3 \leq 3m$ и $2 \leq m$; | 6) $5n \geq n + 7$ и $n \geq 4$. |

1.103. Сложите неравенства:

- 1) $2a + 1 < 5 - n$ и $-7a + 4 \leq -3n + 1$;
- 2) $7n - 4 \geq 3m + a$ и $-4n + 5 > 2a - 4m$;
- 3) $x^2 > y + 9$ и $2x \geq y - 5$;
- 4) $3t^2 \leq p + 1$ и $2t - t^2 < p^2 - 1$;
- 5) $3a + b < 2k - 1$ и $3b - 2a \leq 9 - 2k$;
- 6) $3x^2 + 2y > 4z - 2$ и $5y - 2x^2 \geq 3 - 3z$.

1.104°. Пусть $m \geq n$. Верно ли, что:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $7 + n \leq m + 7$; | 2) $4^3 m \geq 4^3 n$; |
| 3) $(-1)^5 m \geq (-1)^5 n$; | 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 m \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^0 n$; |
| 5) $1 - 2m \leq 1 - 2n$; | 6) $\frac{(-2)^5}{-2^4} m \geq \frac{(-2)^5}{-2^4} n$? |

1.105. Пусть $k < p$. Верно ли, что:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $k + 6,5 \leq p + 6,5$; | 2) $k - 3,4 > p - 3,4$; |
| 3) $-8k \leq -8p$; | 4) $2,8k \geq 2,8p$; |
| 5) $k - p \geq k - p$; | 6) $kp \geq kp$? |

1.106. Используя свойства числовых неравенств, преобразуйте данное неравенство в неравенство, правая часть которого равна нулю:

- 1) $7c^2 + 3c - 4 \leq 7c^2 - 5(c - 1)$;
- 2) $9c - 5c^2 + 1 \geq 2 - 5c(2 + c)$;
- 3) $3n(m - 3) + 5m(m - 3) < 4m^2 + 3mn - 5m$;
- 4) $5a(a - 1) - (1 - a) > 6a^2 - 5a - 1$;
- 5) $10a^2 - (a - 2b) \cdot 4a - 6b^2 \leq 2b(4a - 3b)$;
- 6) $(p - 3) \cdot 8p^2 - 4p^3 \geq 5p^3 - (p^3 - 4p)$.

1.107. Используя свойства числовых неравенств, преобразуйте данное неравенство в неравенство, левая часть которого равна нулю:

- 1) $(c - 1)(c + 5) \leq (c - 1)(c + 1)$;
- 2) $(c + 4)(c - 4) \geq (c + 2)(c - 4)$;
- 3) $(4 - c)^2 \leq (c - 3)(c + 2) - 1$;
- 4) $(c - 1)(c + 5) \geq (c + 6)^2 - 15$;
- 5)* $c^3 - 42 \geq (c - 5)(c^2 + 5c + 25)$;
- 6)* $(c + 3)(c^2 - 3c + 9) \geq c^3 - 20$.

1.108. Пусть a — число из естественной области определения выражения, стоящего в левой части неравенства. Верно ли, что:

- 1) $\frac{a^2 - 16}{a^2 - 8a + 16} \cdot \frac{a - 4}{a + 4} \leq 0$;
- 2) $\frac{4a^2 - 9}{2a^2 + 3a} \cdot \frac{a}{2a - 3} \geq 3$;
- 3) $\left(1 + 3a + \frac{9a^2}{1 + 3a} + \frac{1}{3a - 1} + \frac{6a}{1 - 9a^2}\right) \cdot \frac{1}{a} \leq 6$;
- 4) $\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) : \left(a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \geq 0$;
- 5)* $\frac{3a^3 - 81b^3}{18ab^2 + 6a^2b + 2a^3} + \frac{81a^2b - 54ab^2 + 9b^3}{2ab^2 - 12a^2b + 18a^3} \leq 1,5$;
- 6)* $\left(\frac{a + 2}{a^3 - 3a^2 - 4a + 12} + \frac{3 - a}{a^2 - 5a + 6}\right) \cdot (a - 3) \geq 0$?

1.7. Двойные неравенства

Пусть c — рост самого высокого жителя Беларуси в метрах. Так как в Беларуси есть люди, рост которых больше 2 м, то $c > 2$. В то же время рост человека меньше 3 м, поэтому $c < 3$. Итак, верны сразу оба неравенства: $c > 2$ и $c < 3$. Это записывают в виде **двойного неравенства**

$$2 < c < 3$$

(читается обычно с середины: « c больше двух и меньше трех»).

Таким образом, двойное неравенство вида

$$a < c < b$$

означает, что одновременно верны неравенства $c > a$ и $c < b$.



Можно сказать также, что двойное неравенство $a < c < b$ равносильно утверждению «число c находится между числами a и b ».

Поясните самостоятельно, что означают двойные неравенства вида:

$$a \leq c < b;$$

$$a < c \leq b;$$

$$a \leq c \leq b.$$

Прочитайте каждое из этих неравенств.

Пример 1. Пусть $-1 < p < 5$ и $-3 < q < -2$. Пользуясь свойствами числовых неравенств, оценить значения:

а) суммы $p + q$;

б) разности $p - q$.

Решение. а) Поскольку неравенства одного знака можно складывать, то:

$$\begin{array}{r} -1 < p < 5 \\ + \quad -3 < q < -2 \\ \hline -4 < p + q < 3. \end{array}$$

б) Представим выражение $p - q$ в виде суммы: $p - q = p + (-q)$. Запишем двойное неравенство для $-q$, умножив все части неравенства $-3 < q < -2$ на -1 :

$$-3 \cdot (-1) > -q > -2 \cdot (-1).$$

Перепишем это неравенство от меньшего к большему:

$$2 < -q < 3.$$

Теперь по правилу сложения неравенств одного знака получим:

$$\begin{array}{r} -1 < p < 5 \\ + \quad 2 < -q < 3 \\ \hline 1 < p + (-q) < 8, \end{array}$$

т. е. $1 < p - q < 8$.

Ответ: а) $-4 < p + q < 3$; б) $1 < p - q < 8$.

Пример 2. Пусть $1 \leq m \leq 3$ и $2 < t < 5$. Оценить значения выражения

$$2t - 3m.$$

Решение. По свойству числовых неравенств, умножив неравенство $2 < t < 5$ на число 2, получим верное числовое неравенство с теми же знаками

$$4 < 2t < 10. \quad (1)$$

Умножив верное числовое неравенство $1 \leq m \leq 3$ на число -3 и заменив знаки неравенства на противоположные, получим верное числовое неравенство

$$-3 \geq -3m \geq -9. \quad (2)$$

Переписав неравенство (2) от меньшего к большему, получим

$$-9 \leq -3m \leq -3. \quad (3)$$

Сложим неравенства (1) и (3):

$$\begin{array}{r} 4 < 2t < 10 \\ + \quad -9 \leq -3m \leq -3 \\ \hline -5 < 2t - 3m < 7. \end{array}$$

Ответ: $-5 < 2t - 3m < 7$.

Пример 3. Пусть $1 < c < 2$ и $3 < d < 5$. Пользуясь свойствами числовых неравенств, оценить значения:

а) произведения cd ; б) частного $\frac{c}{d}$.

Решение. а) Поскольку неравенства одного знака с положительными частями можно умножать, то:

$$\begin{array}{r} 1 < c < 2 \\ \times \quad 3 < d < 5 \\ \hline 1 \cdot 3 < cd < 2 \cdot 5, \end{array}$$

т. е. $3 < cd < 10$.

б) Представим выражение $\frac{c}{d}$ как произведение: $\frac{c}{d} = c \cdot \frac{1}{d}$.

Запишем двойное неравенство для $\frac{1}{d}$, воспользовавшись следствием 2 п. 1.4: так как $3 < d < 5$, то $\frac{1}{3} > \frac{1}{d} > \frac{1}{5}$, или $\frac{1}{5} < \frac{1}{d} < \frac{1}{3}$. Теперь по правилу умножения неравенств одного знака с положительными частями получим:

$$\begin{array}{r} 1 < c < 2 \\ \times \frac{1}{5} < \frac{1}{d} < \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{5} < \frac{c}{d} < 2 \cdot \frac{1}{3}, \end{array}$$

т. е. $\frac{1}{5} < \frac{c}{d} < \frac{2}{3}$.

Ответ: а) $3 < cd < 10$; б) $\frac{1}{5} < \frac{c}{d} < \frac{2}{3}$.

Пример 4. Саша заметил, что на взвешивание товара для одного покупателя продавец тратит от 1 мин до 3 мин, а на оплату покупки уходит от 0,5 мин до 1 мин. Успеет ли Саша сделать покупку за 10 мин, если перед ним в очереди стоят 4 человека? А за 20 мин? А за 7 мин?

Решение. Если обозначить время, уходящее на взвешивание товара, буквой t , а время на оплату — буквой p , то 5 человек продавец обслужит за $5(t+p)$ мин. Поскольку $1 \leq t \leq 3$, а $0,5 \leq p \leq 1$, то $1,5 \leq p+t \leq 4$. Отсюда получим

$$7,5 \leq 5(t+p) \leq 20.$$

Таким образом, за 10 мин Саша может успеть, а может и не успеть сделать покупку; за 20 мин успеет; за 7 мин не успеет.

Ответ: за 10 мин может не успеть; за 20 мин успеет; за 7 мин не успеет.

▲ **Пример 5.** Указать наименьшее и наибольшее значения выражения $7 - \frac{4}{k}$, где $2 \leq k \leq 3$.

Решение. Оценим возможные значения выражения $7 - \frac{4}{k}$. По условию имеем

$$2 \leq k \leq 3;$$

↓ по свойству 8 п. 1.6 получим ↓

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2};$$

↓ по свойству 5 п. 1.6 умножим все части неравенства на -4 ↓

$$\frac{-4}{3} \geq \frac{-4}{k} \geq \frac{-4}{2};$$

↓ сократим дробь справа и перепишем неравенство от меньшего к большему ↓

$$-2 \leq -\frac{4}{k} \leq -\frac{4}{3};$$

↓ по свойству 3 п. 1.6 прибавим ко всем частям неравенства число 7 ↓

$$7 - 2 \leq 7 - \frac{4}{k} \leq 7 - \frac{4}{3};$$

↓ найдем значения числовых выражений ↓

$$5 \leq 7 - \frac{4}{k} \leq 5\frac{2}{3}.$$

Таким образом, при любых k , удовлетворяющих условию $2 \leq k \leq 3$, значение выражения $7 - \frac{4}{k}$ не меньше 5 и не больше $5\frac{2}{3}$.

А может ли значение этого выражения быть равным 5? Да, при $k = 2$ (проверьте).

А может ли значение этого выражения быть равным $5\frac{2}{3}$? Да, при $k = 3$ (проверьте).

Ответ: наименьшее значение 5; наибольшее значение $5\frac{2}{3}$. ▲

Утверждение, имеющее форму двойного неравенства $a < c < b$, можно записать и иначе — с помощью фигурной скобки, которая заменяет союз «и»:

$$\begin{cases} c > a, \\ c < b. \end{cases}$$

Такую запись называют **системой неравенств**. Неравенства в системе читают поочередно: «с больше a и с меньше b ».



1. Что обозначает и как читается каждое из двойных неравенств:
 $a < c < b$, $a \leq c < b$, $a < c \leq b$, $a \leq c \leq b$?
2. Какому утверждению равносильно двойное неравенство $a < c < b$?
3. Как можно записать двойное неравенство при помощи фигурной скобки «{»? Как называют и как читают эту запись?
4. Известно, что $5 < a < 8$ и $3 < b < 4$. Верно ли, что:
 - а) $8 < a + b < 12$;
 - б) $2 < a - b < 4$;
 - в) $15 < ab < 32$;
 - г) $\frac{5}{3} < \frac{a}{b} < 2$?
5. Какому двойному неравенству равносильна система неравенств

$$\begin{cases} m \leq p, \\ m > k? \end{cases}$$

Упражнения

1.109°. Прочитайте неравенство:

- 1) $-4 < a < 8$;
- 2) $0 \leq b \leq 9$;
- 3) $-10 \leq c < 0$;
- 4) $2 < d \leq 15$;
- 5) $-1 \leq m \leq 1$;
- 6) $13 < n \leq 21$.

1.110°. Прочитайте систему неравенств:

- 1) $\begin{cases} a > 12, \\ a < 15; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} b \geq -5, \\ b \leq 15; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} c > 0, \\ c \leq 9; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} d \geq -29, \\ d < 13; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} k < 99, \\ k \geq -1; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} p > 0, \\ p \leq 1. \end{cases}$

1.111°. Отметьте штриховкой ту часть координатной прямой, где может лежать точка с координатой a , удовлетворяющей условию:

- 1) $2 < a \leq 8$;
- 2) $-5 \leq a \leq 0$;
- 3) $-6 \leq a < 1,2$;
- 4) $0,2 < a \leq 5$;
- 5) $-7 \leq a \leq 3$;
- 6) $-1 < a < 1$;
- 7) $0 < a < 18$;
- 8) $-13 \leq a < -1$.

1.112°. Отметьте штриховкой ту часть координатной прямой, где может лежать точка с координатой a , удовлетворяющей условию:

- 1) $\begin{cases} a < 5, \\ a > 3; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} a < 3, \\ a > 5; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} a < -12, \\ a \geq -14; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} a \geq 0, \\ a < 6; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} a \geq 0, \\ a \leq -1; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} a < -8, \\ a > 8. \end{cases}$

Какое из этих условий можно записать в виде двойного неравенства?

1.113°. Известно, что точка $M(a)$ лежит на заштрихованной части координатной прямой (рис. 9). Запишите условие, которому удовлетворяет координата a в виде:

1) двойного неравенства; 2) системы неравенств.

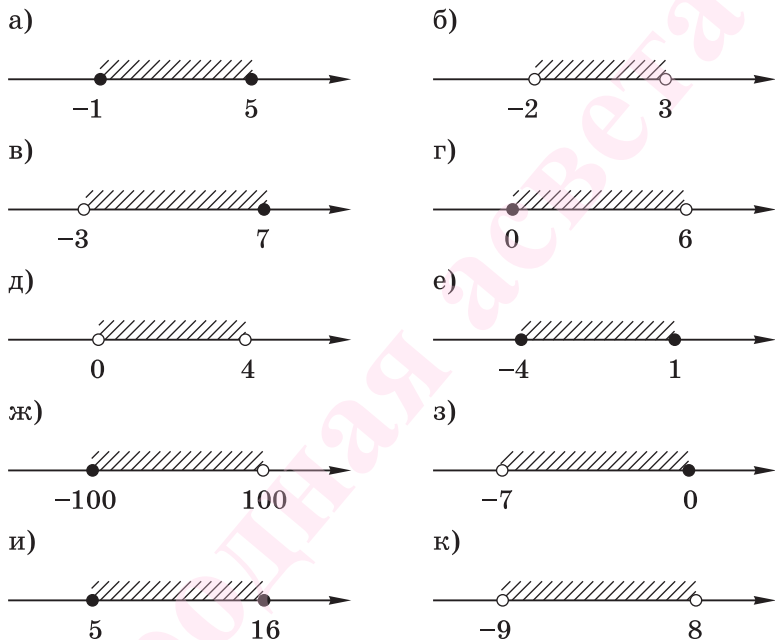


Рис. 9

1.114°. Запишите в виде системы неравенств двойное неравенство:

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| 1) $-3 \leq y < 15$; | 2) $13 \leq m \leq 118$; |
| 3) $-18 < n < -1$; | 4) $-5 < t \leq 12$; |
| 5) $0 < k \leq 7$; | 6) $-20 \leq p < 0$. |

1.115°. Запишите в виде двойного неравенства систему неравенств:

- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1) $\begin{cases} a < 7, \\ a > 5; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} m \geq -8, \\ m < -4; \end{cases}$ | 3) $\begin{cases} p < 0, \\ p \geq -4; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} k \geq 0, \\ k \leq 2. \end{cases}$ |
|---|--|---|---|

1.116. Известно, что $1 < t < 7$. Оцените значения выражения:

- 1) $2t$; 2) $\frac{t}{4}$; 3) $-4t$; 4) $-\frac{t}{7}$;
5) $t + 1$; 6) $t - 3$; 7) $5 - t$; 8) $4 - 2t$.

1.117. Известно, что $12 \leq t \leq 20$. Оцените значения выражения:

- 1) $t - 10$; 2) $t + 4$; 3) $2t - 25$; 4) $\frac{t}{2}$;
5) $\frac{t}{4} + 6$; 6) $\frac{t}{10} + 5$; 7) $8 - \frac{t}{4}$; 8) $20 - \frac{t}{8}$.

1.118. Известно, что $3 < a \leq 5$. Оцените значения выражения:

- 1) $5a$; 2) $7a$; 3) $-a$; 4) $-3a$;
5) $a + 4$; 6) $a - 5$; 7) $11 - a$; 8) $10 - 3a$;
9) $\frac{a}{3}$; 10) $\frac{a}{5}$; 11) $\frac{1}{a} + 2$; 12) $\frac{1}{a} + 1$.

1.119. Известно, что $2 \leq k \leq 6$ и $1 < p < 3$. Оцените значения выражения:

- 1) $-k$; 2) $-p$; 3) $-4p$; 4) $-2k$;
5) $k - p$; 6) $p - k$; 7) $5k - 4p$; 8) $3p - 2k$;
9) $\frac{1}{p}$; 10) $\frac{1}{k}$; 11) $\frac{k}{p}$; 12) $\frac{p}{k}$.

1.120. Известно, что $4 < x < 12$ и $2 \leq y \leq 4$. Оцените значения выражения:

- 1) $\frac{1}{y}$; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{x}{y}$; 4) $\frac{y}{x}$;
5) $-\frac{5}{x}$; 6) $-\frac{7}{y}$; 7) $\frac{1}{y} - 5x$; 8) $\frac{1}{x} - 2y$.

1.121. 1) При измерении стороны квадрата a в сантиметрах получили: $3,2 \leq a \leq 3,3$. Оцените значения периметра P и площади S квадрата.

2) При измерении сторон прямоугольника a и b в сантиметрах получили: $6,3 \leq a \leq 6,4$ и $2,5 \leq b \leq 2,6$. Оцените значения периметра P и площади S прямоугольника.

- 1.122.** Дан треугольник со сторонами a , b и c . Какие значения могут принимать длина стороны c и полупериметр p этого треугольника, если:
- 1) $a = 5$ см; $b = 8$ см;
 - 2) $a = 12$ см; $b = 6$ см?
- 1.123.** 1) Периметр P параллелограмма больше 20 см, а длина его стороны a меньше 6 см. Какие значения может принимать длина стороны b ?
- 2) Периметр P параллелограмма меньше 30 см, а длина стороны a больше 10 см. Какие значения может принимать длина стороны b ?
- 1.124.** В каждом из 10 вагонов проехавшей электрички было от 60 до 95 пассажиров, а на обратном пути — от 75 до 100. Каким может быть число пассажиров, перевезенных электричкой за оба рейса?
- 1.125.** Каждый из 14 мальчиков имеет от 7 до 9 наклеек и от 3 до 5 марок, а каждая из 16 девочек имеет от 8 до 10 наклеек и от 2 до 4 марок. Какими могут быть число наклеек и число марок у всех 30 детей?

1.8. Доказательство неравенств

Пусть A и B — выражения. Доказать неравенство $A < B$ ($A > B$, $A \leq B$, $A \geq B$) — это значит доказать, что оно обращается в верное числовое неравенство при всех значениях переменных, для которых оба выражения A и B определены.

Пример 1. Доказать, что при любых значениях a и b верно неравенство

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и определим ее знак при любых значениях a и b :

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \quad \square$$

Пример 2. Доказать, что при любых значениях $a > 0$ верно неравенство

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей неравенства и установим ее знак при любых положительных значениях a :

$$a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Поскольку $a > 0$ по условию и $(a-1)^2 \geq 0$ при любых значениях a , то $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 0$.

Значит, неравенство $a + \frac{1}{a} \geq 2$ верно при любых значениях $a > 0$. $\square$

Пример 3. Доказать, что при любых значениях a верно неравенство

$$(a-1)(a+1)(a^2+1) < a^4.$$

Доказательство. Применив в левой части неравенства формулы сокращенного умножения, получим:

$$(a-1)(a+1)(a^2+1) = (a^2-1)(a^2+1) = a^4-1.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $a^4-1 < a^4$, а это неравенство верно при любом значении a . $\square$

Пример 4. Доказать, что при любом значении x верно неравенство

$$2x^2 + 2x + 1 > 0.$$

Доказательство. Поскольку правая часть неравенства равна нулю, то доказательство сводится к определению знака его левой части при любых значениях x .

Преобразуем выражение $2x^2 + 2x + 1$:

$$2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x^2 + 2x + 1) = x^2 + (x+1)^2.$$

Так как выражения x^2 и $(x+1)^2$ принимают только неотрицательные и одновременно не равные нулю значения (поясните почему), то сумма $x^2 + (x+1)^2$ при любых значениях x

принимает положительные значения. Таким образом, доказано, что исходное неравенство верно. $\square$

Пример 5. Доказать, что если к числителю и знаменателю неправильной дроби $\frac{a}{b}$ ($a > b > 0$) прибавить одно и то же положительное число n , то полученная дробь будет меньше данной.

Доказательство. Рассмотрим разность дробей $\frac{a+n}{b+n}$ и $\frac{a}{b}$:

$$\frac{a+n}{b+n} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bn-ab-an}{(b+n)b} = \frac{(b-a)n}{(b+n)b}.$$

Так как дробь $\frac{a}{b}$ неправильная, то $a > b$, значит, $b-a < 0$, а поскольку $b > 0$ и $n > 0$, то $b+n > 0$. Таким образом, разность дробей $\frac{(b-a)n}{(b+n)b}$ принимает только отрицательные значения, поэтому $\frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$. Неравенство доказано. $\square$

▲ Пример 6. Доказать, что при любых значениях a и b верно неравенство

$$|a+b| \leq |a|+|b|. \quad (1)$$

Доказательство. Когда одно из чисел, например b , равно нулю, то имеем

$$|a+b| = |a+0| = |a| = |a|+|0| = |a|+|b|,$$

и, следовательно, неравенство (1) верно.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. При этом возможны три случая:

- 1) оба числа a и b положительны;
- 2) оба числа a и b отрицательны;
- 3) одно из чисел, например a , положительно, а другое — отрицательно.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

- 1) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a+b > 0$ и $|a| = a$, $|b| = b$, $|a+b| = a+b$. Поэтому имеем

$$|a+b| = a+b = |a|+|b|,$$

и, следовательно, неравенство (1) верно.

2) Если $a < 0$ и $b < 0$, то $a + b < 0$ и $|a| = -a$, $|b| = -b$,
 $|a + b| = -(a + b)$.

Поэтому имеем

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$

и, следовательно, неравенство (1) верно.

3) Если $a > 0$ и $b < 0$, то $|a| = a$, $|b| = -b$.

а) Возможно, что $a + b \geq 0$. Тогда

$$|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b| < |a| + |b|,$$

и, следовательно, неравенство (1) верно.

б) Возможно, что $a + b < 0$. Тогда

$$|a + b| = -(a + b) = -a - b = -|a| + |b| < |a| + |b|,$$

и, следовательно, неравенство (1) верно. ☒

Доказанное в примере 6 неравенство читается так:



модуль суммы двух чисел не превосходит суммы их модулей.

Пример 7. Доказать, что при любых значениях a и b верно неравенство

$$|a + b| \geq |a| - |b|. \quad (2)$$

Доказательство. Преобразуем разность выражений $|a + b|$ и $|a| - |b|$:

$$|a + b| + |b| - |a| =$$

↓ на основании определения модуля и неравенства (1) ↓
 ↓ получим ↓

$$= (|a + b| + |-b|) - |a| \geq |a + b - b| - |a|.$$

Таким образом, имеем (поясните почему):

$$|a + b| + |b| - |a| \geq 0, \text{ т. е. } |a + b| \geq |a| - |b|. \quad \text{☒} \quad \blacktriangle$$



1. Что значит доказать неравенство?

2. Опишите один из возможных способов доказательства неравенства.

3*. Докажите неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$. Как оно читается?

4*. Докажите неравенство $|a + b| \geq |a| - |b|$. Как его можно прочитать?

Упражнения

Докажите неравенство (1.126—1.130).

1.126°. 1) $5(k+1) - k < 4(2+k)$;

2) $3(k-1) + k - 4(2+k) < 0$;

3) $(k-5)^2 > k(k-10)$;

4) $(3k+2)(2k+1) > 6k\left(k+1\frac{1}{6}\right)$.

1.127°. 1) $4a^2 - 6a + 1 > 2a(2a-3)$;

2) $a(a+2) > 2a-3$;

3) $(a+4)(a+2) < (a+3)^2$;

4) $a(a-8) < (a-4)^2$.

1.128°. 1) $8b(b-2) > 2(2b-4)(2b+4) - 16b$;

2) $(3b+4)(3b-4) < 9b^2 + 1$;

3) $(2b+5)^2 > 2b(b+10)$;

4) $(9-2b)^2 + 33b < 82 + b(4b-3)$.

1.129°. 1) $(c+3)^2 > -2$;

2) $(c-4)^2 > -3$;

3) $c(c+1) > c-4$;

4) $c(c-6) > -2-6c$;

5) $c(c-5) < (c-3)(c-2)$;

6) $(c-1)(c-6) < (c-3)(c-4)$.

1.130°. 1) $(8k-3)(8k+3) < 64k^2$;

2) $3k^2 - 12k + 49 > 3k(k-4)$;

3) $(k-3)^2 + k(6-k) > 0$;

4) $(5k-1)(5k+1) < 25k^2$.

1.131. Верно ли при любом значении k неравенство:

1) $26k^2 + 4 \geq 0$;

2) $-(k-3)^2 < 0$;

3) $k^2 + (-k)^2 \geq 0$;

4) $(k+16)^2 \geq 0$;

5) $-(-3k)^2 + (-3k) \cdot 3 \geq 0$;

6) $25 - 10k + k^2 \leq 0$?

1.132. Верно ли при любом значении a неравенство:

1) $(a+2)(a-6) < (2a-1)^2$;

2) $(a+6)(a-3) > (a-4)(a+7)$;

3) $(a+2)(a-3) \leq (a+3)(a-2)$;

4) $(a-5)(a+1) \geq (a+5)(a-1)$;

5) $(a-4)(a-3) < (a-5)(a-2)$;

6) $(a+8)(a+3) > (a+7)(a+4)$?

Докажите неравенство (1.133—1.139).

1.133°. 1) $\frac{1+k^2}{2} \geq k$; 2) $4k^2 + 1 \geq 4k$; 3) $k^2 + 2k \geq -1$;
 4) $\frac{4+k^2}{2} \geq 2k$; 5) $c^2 + \frac{1}{c^2} \geq 2$; 6) $\frac{3}{|a|} + \frac{|a|}{3} \geq 2$.

1.134°. 1) $x(y-x) \leq xy$; 2) $4xy \leq 4x^2 + y^2$;
 3) $x^2 + xy + y^2 \geq -xy$; 4) $x(x-y) \geq y(x-y)$;
 5) $11p^2 + 5p + 1 \geq 2p^2 - p$; 6) $p + p^2 \leq 26p^2 - 29p + 9$.

1.135. 1) $y^2 + \frac{4}{1+y^2} \geq 3$; 2) $\frac{y^2}{1+y^4} \leq \frac{1}{2}$;
 3) $\frac{y^8+1}{y^4} \geq \frac{1}{0,5}$; 4) $\frac{y^2}{2} + \frac{18}{y^2+2} \geq 5$.

1.136*. 1) $m^2 + n^2 + 2 \geq 2(m+n)$;
 2) $m^2 + n^2 + k^2 + 3 \geq 2(m+n+k)$;
 3) $m^2 + n^2 + 10 \geq 6m - 2n$;
 4) $4m^2 + n^2 + 2 \geq 2n - 4m$;
 5) $a^2 + ab + b^2 \geq 2ab$;
 6) $a^2 + 2ab + 9b^2 \geq 4ab$;
 7) $4m^2 + 9n^2 \geq 12|mn|$;
 8) $25m^2 + 16n^2 \geq 40|mn|$.

1.137*. 1) $c^2 + d^2 - 2cd + 2c - 2d + 1 \geq 0$;
 2) $c^2 + 4y^2 + 4y - 4c + 5 \geq 0$;
 3) $p^2 + k^2 - 2pk(p+k) + 2pk + p^2k^2 \geq 0$;
 4) $p^2(k^2 + 4) - 4p^2k + 2pk - 4p + 1 \geq 0$.

1.138*. 1) $3a^2 + b^2 + 8a + 4b - 2ab + 22 \geq 0$;
 2) $a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a + 6b + 3 \geq 0$;
 3) $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 \geq 4ab(a^2 + b^2)$;
 4) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$.

- 1.139*.** 1) $x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq xyz(x + y + z)$;
 2) $z(x^2 + y^2) + x(y^2 + z^2) + y(x^2 + z^2) \geq 6xyz$;
 3) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$;
 4) $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \geq \frac{xy+yz+xz}{3}$.

1.140. Докажите, что:

- 1) $m^2 + k^2 \geq \frac{1}{2}$, если $m + k = 1$;
 2) $p^2 + k^2 - 0,5 \geq 0$, если $p - k = 1$;
 3) $\frac{m+k}{n+k} < \frac{m}{n}$, если $n > 0$, $k > 0$, $m > n$;
 4)* $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Глава 2

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

2.1. Периодические дроби

Десятичные дроби, которые рассматривались до сих пор, имели *после запятой конечное число знаков*. Такие дроби называют *конечными десятичными дробями*.

Обратить в конечную десятичную можно только такую несократимую обыкновенную дробь, знаменатель которой не имеет никаких простых множителей, кроме 2 и 5. В этом случае числитель делят на знаменатель. Например,

$$\frac{1}{4} = 0,25; \quad \frac{7}{80} = 0,0875; \quad \frac{371}{125} = 2,968.$$

Применим теперь этот же метод обращения обыкновенной дроби в десятичную к числу $\frac{72}{11}$. Для этого будем делить «уголком» 72,000... на 11:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 11 \\ -66 & 6,5454... \\ \hline 60 & \\ -55 & \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 60 & \\ -55 & \\ \hline 50 & \\ -44 & \\ \hline 60 & \\ \dots & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{72}{11} = 6,5454... .$

Бесконечная десятичная дробь, стоящая в правой части этого равенства, содержит периодически повторяющуюся группу цифр 54. Эта группа цифр называется *периодом* дроби, а сама дробь — *бесконечной десятичной периодической дробью* (или просто *периодической дробью*).

При записи таких дробей период заключают в скобки и пишут только один раз: $\frac{72}{11} = 6,(54).$

(Читается «шесть целых, пятьдесят четыре в периоде».)

Еще один пример: $\frac{5}{6} = 0,83333... = 0,8(3)$.

(Читается «нуль целых, восемь десятых, три в периоде».)

Приписывая к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы получаем бесконечную десятичную дробь. Поэтому конечные десятичные дроби тоже считаются периодическими с периодом 0. Вообще:



каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

И наоборот,



каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Эти утверждения будут обоснованы в 11-м классе. Там же будет показано, что периодическую дробь с периодом 9 всегда можно заменить соответствующей конечной десятичной дробью. Поэтому периодические дроби с периодом 9 мы не рассматриваем.



В научных трудах по математике периодические десятичные дроби появились в XVII в., а в учебники сведения о них вошли только в XIX в.

В 1676 г. английский математик Джон Валлис в своем трактате по алгебре изложил важнейшие свойства периодических дробей. Там же он описал и правило обращения периодической дроби в обыкновенную.



1. Любое ли рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби?
2. Приведите пример рационального числа, которое:
 - а) можно представить в виде конечной десятичной дроби;
 - б) нельзя представить в виде конечной десятичной дроби.
3. Можно ли представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби:
 - а) конечную десятичную дробь;
 - б) натуральное число?

Упражнения

2.1°. Можно ли дробь обратить в конечную десятичную дробь:

- 1) $\frac{7}{8}$; 2) $\frac{19}{40}$; 3) $\frac{5}{48}$; 4) $\frac{29}{21}$;
 5) $1\frac{3}{14}$; 6) $2\frac{3}{20}$; 7) $7\frac{5}{16}$; 8) $3\frac{7}{18}$?

2.2°. Представьте число в виде десятичной дроби:

- 1) $\frac{5}{16}$; 2) $\frac{17}{30}$; 3) $6\frac{1}{54}$; 4) $1\frac{31}{44}$;
 5) $3\frac{11}{15}$; 6) $22\frac{1}{6}$; 7) $14\frac{5}{22}$; 8) $5\frac{13}{24}$.

2.3°. Верно ли равенство:

- 1) $\frac{68}{33} = 2,(6)$; 2) $\frac{56}{11} = 5,(09)$; 3) $\frac{26}{15} = 1,7(3)$;
 4) $\frac{23}{15} = 1,5(3)$ 5) $\frac{49}{21} = 2,(31)$; 6) $\frac{13}{45} = 3,2(8)$?

2.4. Представьте число в виде периодической дроби:

- 1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{4}{7}$; 3) $\frac{31}{33}$; 4) $\frac{41}{44}$;
 5) $3\frac{23}{30}$; 6) $4\frac{37}{60}$; 7) $11\frac{13}{54}$; 8) $23\frac{11}{27}$.

2.2. Иррациональные числа

За время изучения математики в школе мы познакомились с натуральными, целыми и рациональными числами.

Множество всех натуральных чисел обозначается буквой N .

Множество всех целых чисел обозначается буквой Z .

Множество всех рациональных чисел обозначается буквой Q (рис. 10).

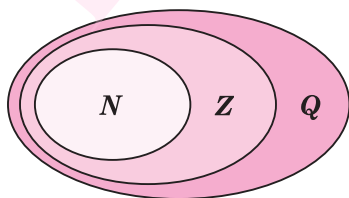


Рис. 10

Число 7 натуральное. Мы говорим еще: «Число 7 принадлежит множеству N » — и пишем: « $7 \in N$ ». Знак « $\in$ » означает «принадлежит». А число -7 не принадлежит множеству N . Это записывается так: « $-7 \notin N$ ». Знак « $\notin$ » означает «не принадлежит».

Приведем еще несколько примеров:

$$-3 \notin \mathbb{N}; \quad -3 \in \mathbb{Z}; \quad -3 \in \mathbb{Q}; \quad \frac{13}{17} \notin \mathbb{N}; \quad \frac{13}{17} \notin \mathbb{Z}; \quad \frac{13}{17} \in \mathbb{Q}.$$

Напомним, что каждое рациональное число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{k}{n}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Если знаменатель дроби $n > 1$, т. е. число $\frac{k}{n}$ не является целым, то его называют **дробным**.



Отметим одно свойство рациональных чисел:
если число t дробное, то число t^2 тоже дробное.

Действительно, представим t в виде несократимой дроби:

$$t = \frac{k}{n}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Числа k и n не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, числа k^2 и n^2 тоже не имеют общих делителей, отличных от 1. Поэтому дробь $\frac{k^2}{n^2}$ несократимая, а так как $n^2 > 1$, то число $t^2 = \frac{k^2}{n^2}$ дробное. ☒

Теорема 1. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.*

Доказательство. Пусть t — такое рациональное число, что его квадрат равен 2, т. е. $t^2 = 2$.

Число t не может быть целым, так как среди квадратов целых чисел 0, 1, 4, 9, ... нет числа 2.

Число t не может быть дробным, так как квадрат дробного рационального числа является дробным числом, а $t^2 = 2$ — целое число.

Поскольку рациональное число либо целое, либо дробное, а число t ни то, ни другое, то оно не может быть рациональным. Значит, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. ☒

Рациональные числа используются для записи результатов измерения различных величин, например длин отрезков. Однако, оказалось, что существуют отрезки, длины которых рациональными числами не выражаются.

Теорема 2. *Длина диагонали квадрата со стороной, равной единице длины, не может быть выражена рациональным числом.*

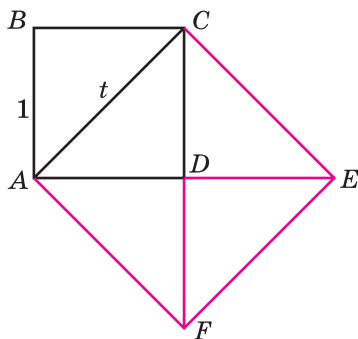


Рис. 11

Доказательство. Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной, длина которой равна 1, и построим на его диагонали AC квадрат $ACEF$ (рис. 11). Длину этой диагонали обозначим буквой t . Предположим, что t — рациональное число.

По формуле площади квадрата имеем

$$S_{ABCD} = AB^2 = 1; S_{ACEF} = AC^2 = t^2. \quad (1)$$

Квадрат $ABCD$ состоит из двух равных треугольников (см. рис. 11), а квадрат $ACEF$ — из четырех таких же треугольников (обоснуйте это). Значит, $S_{ACEF} = 2S_{ABCD}$. Из этого равенства и из равенств (1) получим:

$$t^2 = AC^2 = S_{ACEF} = 2S_{ABCD} = 2AB^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Итак, $t^2 = 2$, а согласно теореме 1 не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Таким образом, результат измерения длины диагонали квадрата со стороной, равной единице, не может быть выражен рациональным числом. Значит, рациональных чисел недостаточно для измерения отрезков. $\square$

При изучении математики мы уже несколько раз оказывались в такой ситуации, когда известных нам чисел не хватало для решения определенных задач и приходилось дополнять их новыми числами. Так, на множестве натуральных чисел нельзя решить уравнение

$$5x = 3$$

и приходится дополнять натуральные числа дробными. А на множестве положительных чисел нельзя решить уравнение

$$3 + x = 1$$

и приходится дополнять положительные числа отрицательными.

Для измерения отрезков, длина которых не выражается рациональными числами, а также для удовлетворения многих других потребностей математики приходится вводить новые числа; они называются *иррациональными*.

А

Знаменитый древнегреческий математик и философ Пифагор и его ученики, жившие в VI в. до н. э., не знали других чисел, кроме рациональных. В основе философии пифагорейцев лежало понятие о числе как основе всех вещей и явлений природы. И вдруг они обнаружили, что диагональ квадрата, сторона которого равна 1, не может быть выражена никаким числом, так как пифагорейцы использовали только рациональные числа. Такое открытие было большим ударом по учению Пифагора, и поэтому его последователи долго держали в тайне этот факт. По преданию, ученик Пифагора, раскрывший эту тайну, был наказан богами и погиб во время кораблекрушения.

Открытые пифагорейцами новые числа называли «иррациональными», т. е. «неразумными» («*ratio*» в переводе с латинского означает «разум»), а привычные «старые» понятные числа стали называть «разумными», т. е. «рациональными».

?

1. Как обозначается множество всех натуральных чисел? Целых чисел? Рациональных чисел?
2. Докажите, что если рациональное число t дробное, то число t^2 тоже дробное.
3. Докажите:
а) теорему 1; б) теорему 2.

Упражнения

2.5°. Запишите три числа, принадлежащие множеству:

- 1) положительных целых чисел;
- 2) отрицательных целых чисел;
- 3) простых чисел;
- 4) составных чисел;
- 5) четных чисел;
- 6) нечетных чисел;
- 7) чисел, кратных 5;
- 8) чисел, не кратных 5;
- 9) чисел, меньших 5;
- 10) чисел, больших 5;
- 11) чисел, кратных 2 и кратных 3;
- 12) чисел, кратных 3 и кратных 7.

- 2.6°.** Представьте в виде несократимой дроби $\frac{k}{n}$, где $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, число:
- 1) 7; 2) $7\frac{14}{15}$; 3) 7,14; 4) 0,72;
- 5) -5; 6) $-5\frac{11}{12}$; 7) -5,35; 8) -0,84.
- 2.7.** Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен:
- 1) 11; 2) 13; 3) 10; 4) 14.
- 2.8.** Является ли: а) сумма; б) разность; в) произведение; г) частное (когда делитель не равен нулю):
- 1) двух натуральных чисел натуральным числом;
- 2) двух целых чисел целым числом;
- 3) двух рациональных чисел рациональным числом?

2.3. Действительные числа

Мы знаем, что длина диагонали квадрата со стороной, равной единице длины, не выражается рациональным числом. А как же все-таки определить длину этой диагонали?

В математике определение длины произвольного отрезка исходит из следующего практического приема измерений: *если длину отрезка нельзя измерить целой единицей, то используют десятую, сотую, тысячную и т. д. долю этой единицы.*

Пусть, например, требуется измерить длину отрезка AB , т. е. сравнить этот отрезок с единичным отрезком e (рис. 12). Для этого будем откладывать отрезок e на отрезке AB .

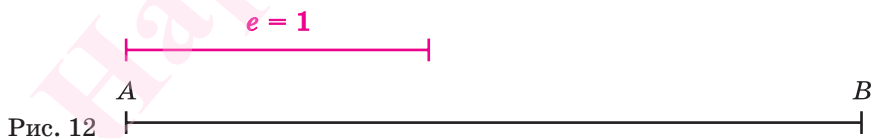


Рис. 12

Может случиться, что отрезок e уложится на отрезке AB целое число раз, например ровно 2 раза (рис. 13). Тогда мы говорим, что длина отрезка AB равна 2.



Рис. 13

Если же после того, как отрезок e на отрезке AB уложится 2 раза, останется отрезок A_1B , меньший e , то продолжим процесс. Теперь на отрезке A_1B будем откладывать от точки A_1 отрезок $e_1 = 0,1e$ (рис. 14).

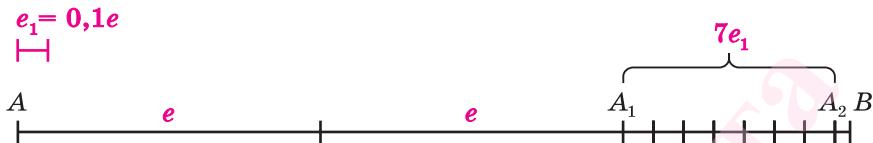


Рис. 14

Если после того, как отрезок e_1 на отрезке A_1B уложится, например, 7 раз, останется отрезок A_2B , меньший e_1 , то продолжим процесс. При этом (если потребуется) будем использовать для измерения отрезки $e_2 = 0,01e$, $e_3 = 0,001e$ и т. д.

Процесс измерения может окончиться на каком-то шаге, тогда длина отрезка AB выразится конечной десятичной дробью, например $AB = 2,7854$. Но теоретически возможно (конечно, только мысленно), что всякий раз будет оставаться кусочек измеряемого отрезка и тогда процесс измерения не будет иметь конца, т. е. приведет к бесконечной последовательности цифр после запятой. Результатом в этом случае будет *положительная бесконечная десятичная дробь*.

Поставив перед положительной бесконечной десятичной дробью знак «минус», получим *отрицательную бесконечную десятичную дробь*. Например, $-2,7854\dots$.

Бесконечные десятичные дроби, как положительные, так и отрицательные, и нуль называются действительными числами.

Множество всех действительных чисел обозначается буквой R (рис. 15).

Действительные числа называют еще **вещественными**.

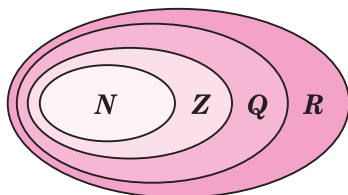


Рис. 15

Таким образом,



*любой отрезок имеет длину, равную некоторому положительному действительному числу;
и наоборот,
для любого положительного действительного числа существует отрезок, длина которого равна этому числу.*

Бесконечная десятичная дробь может быть или периодической или непериодической. Как мы знаем, каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число. Но есть еще и **непериодические** бесконечные десятичные дроби. Например, длина диагонали квадрата со стороной, равной единице длины, не является рациональным числом, а следовательно, не может быть бесконечной десятичной периодической дробью.

Бесконечные десятичные непериодические дроби называются иррациональными числами.

Приведем несколько примеров иррациональных чисел, записанных в виде бесконечной десятичной дроби.

1) Число $a = 0,12345678910111213... .$

Здесь после запятой записаны без пропусков в порядке возрастания все числа натурального ряда, следовательно, дробь a — непериодическая и, значит, a — иррациональное число.

2) Число $b = 0,101001000100001000001... .$

Здесь после запятой записаны: единица — нуль, единица — два нуля, единица — три нуля и т. д., следовательно, дробь b — непериодическая и, значит, b — иррациональное число.

3) Число $\pi = 3,1415926... .$ — отношение длины окружности к диаметру.



Иррациональность числа π была доказана немецким математиком Ламбертом в XVIII в.

Модуль действительного числа определяется и обозначается точно так же, как модуль рационального числа. И для

противоположных действительных чисел определение то же, что и для противоположных рациональных чисел.

Пример 1. Записать для каждого из чисел

$$a = 0,12345678...; \quad b = -7,1010010001...; \quad c = 0:$$

а) его модуль; б) противоположное ему число.

Ответ: а) $|a| = 0,12345678...; |b| = 7,1010010001...; |c| = 0;$

б) $-a = -0,12345678...; -b = 7,1010010001...; -c = 0.$

Каждая точка на координатной прямой имеет координату. Если точка находится на положительном координатном луче, то ее координата — это расстояние от точки до начала отсчета, а если на отрицательном, то — это расстояние от точки до начала отсчета, взятое со знаком «минус».

Раньше на координатной прямой рассматривались только точки с рациональными координатами (никаких других чисел, кроме рациональных, мы просто не знали). Но такие точки не заполняли всю координатную прямую — она была «дырявой», без точек с иррациональными координатами. Теперь же



каждой точке на координатной прямой соответствует определенное действительное число — координата этой точки;

и наоборот,

каждому действительному числу a соответствует определенная точка на координатной прямой — точка с координатой a .

Говорят, что между точками координатной прямой и действительными числами установлено **взаимно однозначное соответствие**.

Заметим, что для двух действительных чисел, как и для двух рациональных чисел, если координатная прямая направлена слева направо, то большее число изображается точкой, лежащей правее.

Напомним, что вместо слов «точка, соответствующая числу a », говорят просто «точка a ». Это значит, что множество всех действительных чисел мы представляем себе как множество всех точек координатной прямой.

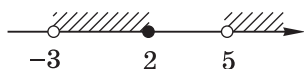


Рис. 16

Пример 2. На координатной прямой отметить штриховкой множество точек a , удовлетворяющих условию $-3 < a \leq 2$ или $a > 5$.

Решение показано на рисунке 16.

Пример 3. По рисунку 17 записать условие, которому удовлетворяет множество точек a заштрихованной части координатной прямой.

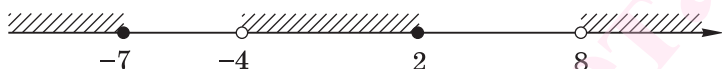


Рис. 17

Ответ: $a \leq -7$ или $-4 < a \leq 2$ или $a > 8$.

Сравнение действительных чисел, записанных в виде бесконечных десятичных дробей, выполняют по тем же правилам, что и сравнение конечных десятичных дробей. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 4. Сравнить числа:

а) $a = -13,27314995\dots$ и $b = -13,27315321\dots$;

б) $n = -13,273$ и $t = -13,2(73)$.

Решение. а) Так как

$$|a| = |-13,27314995\dots| = 13,27314995\dots,$$

$$|b| = |-13,27315321\dots| = 13,27315321\dots, \text{ то}$$

$13,27314995\dots < 13,27315321\dots$, т. е. $|a| < |b|$, значит, $a > b$.
Итак: $-13,27314995\dots > -13,27315321\dots$.

б) Так как $|n| = |-13,273| = 13,273 = 13,2730000\dots$ и

$$|t| = |-13,2(73)| = 13,2(73) = 13,2737373\dots, \text{ то}$$

$$13,273 < 13,2(73), \text{ т. е. } |n| < |t|, \text{ значит, } n > t.$$

Итак: $-13,273 > -13,2(73)$.

Ответ: а) $a > b$; б) $n > t$.

Пример 5. Сравнить числа $p = 317,18(5)$ и $m = 317,1(8)$.

Решение. Пусть $p = p_0, p_1 p_2 p_3\dots$, $m = m_0, m_1 m_2 m_3\dots$ — записи чисел p и m в виде бесконечных десятичных дробей. Поскольку $p = 317,18555\dots$, $m = 317,18888\dots$, то имеем $p_0 = 317 = m_0$; $p_1 = 1 = m_1$; $p_2 = 8 = m_2$; $p_3 = 5 < 8 = m_3$, значит, $p < m$.

Действительные числа можно приближать конечными десятичными дробями. Покажем на примере, что это значит и как это делается.

Пусть $a = 53,2468101214...$ (после запятой последовательно выписаны все четные натуральные числа).

Если «оборвать» эту дробь на цифре первого разряда, то получится число $53,2$; оно меньше, чем a . Если у числа $53,2$ увеличить цифру первого разряда на 1, то получится число $53,3$; оно больше, чем a . Итак,

$$53,2 < a < 53,3.$$

Говорят, что $a \approx 53,2$ является *приближением числа a с точностью до 10^{-1} с недостатком*, а $a \approx 53,3$ является *приближением числа a с точностью до 10^{-1} с избытком*.

Подобным же образом получаем приближения числа a с точностью до 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} и т. д. Например,

$$53,246 < a < 53,247.$$

Значит, $a \approx 53,246$ является *приближением числа a с точностью до 10^{-3} с недостатком*, а $a \approx 53,247$ является *приближением числа a с точностью до 10^{-3} с избытком*.

(Напомним, что знак « $\approx$ » читается «*приближенно равно*».)

Пример 6. Пусть $b = -53,2468101214...$ (после запятой последовательно выписаны все четные натуральные числа). Найти десятичные приближения числа b с точностью до 10^{-4} с недостатком и с избытком.

Решение. Так как

$$-53,2469 < b < -53,2468,$$

то $b \approx -53,2469$ — приближение числа b с точностью до 10^{-4} с недостатком, а $b \approx -53,2468$ — с избытком.

Над действительными числами можно выполнять арифметические действия; они удовлетворяют тем же свойствам, что и действия над рациональными числами.

Заметим, что на практике арифметические действия над действительными числами выполняются приближенно.

Для действительных чисел справедливы те же свойства неравенств, что и для рациональных чисел.



1. Как в математике определяют длину произвольного отрезка?
2. Верно ли, что длину любого отрезка можно записать в виде бесконечной десятичной дроби?
3. Что называется действительным числом? Иррациональным числом?
4. Почему, зная только рациональные числа, нельзя указать координату любой точки координатной прямой?
5. Как сравнить два действительных числа a и b , записанных в виде бесконечных десятичных дробей, если:
а) a и b — положительные; б) a и b — отрицательные?
6. Назовите десятичные приближения числа π с точностью до 10^{-6} .
7. Каким свойствам удовлетворяет:
а) сложение действительных чисел;
б) умножение действительных чисел?
8. Какие свойства неравенств справедливы для действительных чисел?

Упражнения

2.9°. Верно ли, что длина любого отрезка выражается:

- 1) целым числом;
- 2) рациональным числом;
- 3) иррациональным числом;
- 4) рациональным или иррациональным числом?

2.10°. Верно ли, что записано рациональное число:

- 1) $-4,6877777\ldots$ (далее — только цифры 7);
- 2) $2,1549783$;
- 3) $5,1753434217$;
- 4) $-1,1891494545$;
- 5) $0,687237828213$;
- 6) $3,1415926666888\ldots$ (далее — только цифры 8)?

2.11°. Верно ли, что число:

- 1) $3,4(2)$ — рациональное;
- 2) $3,4(2)$ — не является рациональным;
- 3) $3,4(2)$ — действительное;
- 4) $3,4(2)$ — не является целым;
- 5) π — не является рациональным;
- 6) π — действительное?

2.12°. Как можно продолжить запись бесконечной десятичной дроби, чтобы получилось: а) рациональное число; б) иррациональное число:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| 1) 32,0715...; | 2) 13,1444...; | 3) 25,0022...; |
| 4) 43,1789...; | 5) -5,7039...; | 6) -7,4006...? |

2.13°. Сравните числа:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) 5,7986... и 5,7985...; | 2) -3,4825... и -3,4826...; |
| 3) -16,251... и -16,251; | 4) 15,25 и $\frac{61}{4}$; |
| 5) 0 и -0,0000033...; | 6) -51,5151... и -51,151515; |
| 7) -0,375... и $-\frac{3}{8}$; | 8) $\frac{5}{9}$ и 0,5555...; |
| 9) 7,34 и $7\frac{1}{3}$; | 10) 2,571428 и $2\frac{4}{7}$; |
| 11) 3,272727 и 3,277277...; | |
| 12) 0,857143 и $\frac{6}{7}$. | |

2.14. Для числа a укажите: а) его модуль; б) противоположное ему число, если:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $a = -7,(31)$; | 2) $a = -8,232323...$; |
| 3) $a = 0,545454...$; | 4) $a = 3,(702)$. |

2.15. Верно ли, что на координатной прямой точка A лежит правее точки B , если:

- | |
|--|
| 1) $A(3,29292...)$ и $B(3,29272...)$; |
| 2) $A(0)$ и $B(-1,6392...)$; |
| 3) $A(-15,67432...)$ и $B(-15,67342...)$; |
| 4) $A(36,24...)$ и $B(36,20...)$? |

2.16. Какая точка — M или K — находится дальше от точки O (начала отсчета) на координатной прямой, если координаты точек M и K соответственно равны:

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| 1) 8,369... и 7,549...; | 2) -15,3946... и -15,3937...; |
| 3) -0,4465... и 0,5678...; | 4) -9,353... и 9,352...; |
| 5) -2,7... и 2,7...; | 6) -7,356 и 7,356? |

2.17. Сравните числа:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) 72,1(4) и 72,(14); | 2) 43,(26) и 43,2(6); |
| 3) -4,02(3) и -4,0(23); | 4) -8,5(41) и -8,54(1). |

2.18. На координатной прямой отметьте штриховкой множество точек a , удовлетворяющих условию:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $a < -3$ или $a \geq 2$; | 2) $a \leq -1$ или $a > 3$; |
| 3) $-2 \leq a < 5$; | 4) $-4 < a \leq 2$; |
| 5) $-5 < a < 0$ или $a \geq 1$; | 6) $-6 \leq a \leq -2$ или $a > 0$. |

2.19. По рисунку 18 запишите условие, которому удовлетворяет множество точек m заштрихованной части координатной прямой.

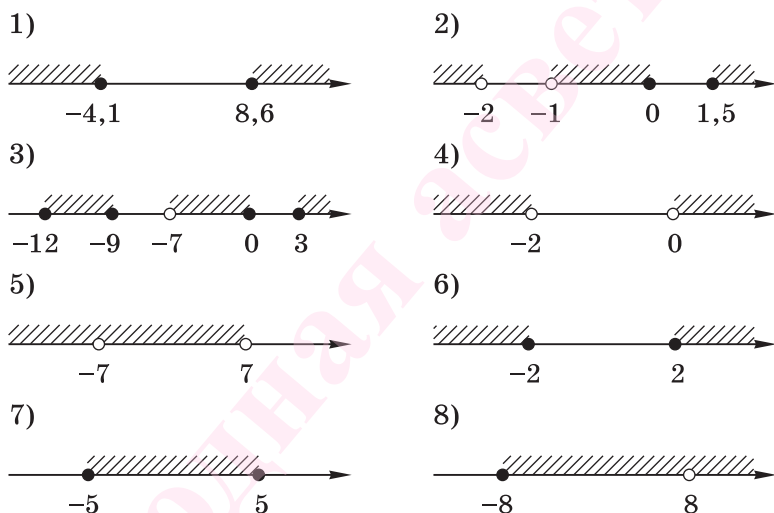


Рис. 18

2.20. Найдите десятичные приближения числа a с точностью до 10^{-5} с недостатком и с избытком, если:

- 1) $a = 48,13579111315\dots$;
- 2) $a = 9,97975973\dots$;
- 3) $a = 11,298297296295\dots$;
- 4) $a = 103,6775774773\dots$.

2.21. Найдите десятичные приближения числа b с точностью до 10^{-3} с недостатком и с избытком, если:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $b = -29,56787651\dots$; | 2) $b = -19,132403546\dots$; |
| 3) $b = -0,410424344\dots$; | 4) $b = -2,389076531\dots$. |

2.4. Числовые промежутки

Введем обозначения для некоторых множеств на координатной прямой.

Пусть $a < b$. При изображении чисел на координатной прямой неравенство $a < x < b$ означает, что точка (число) x расположена правее точки a (так как $x > a$) и левее точки b (так как $x < b$), т. е. точка x лежит между точками a и b .



Рис. 19

Иными словами, точка x лежит на отрезке с концами a и b , причем $x \neq a$ и $x \neq b$ (рис. 19). Множество всех таких точек (чисел) x обозначается $(a; b)$ и читается «промежуток от a до b , где a и b не принадлежат промежутку». (Говорят еще «интервал $(a; b)$ ».)

Множество всех точек (чисел) x , лежащих на отрезке с концами a и b , содержащее точки a и b , обозначается $[a; b]$ (рис. 20) и читается «промежуток от a до b , где a и b принадлежат промежутку». (Говорят еще «отрезок $[a; b]$ ».)

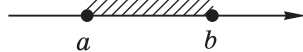


Рис. 20

Таким образом, промежуток $[a; b]$ — это множество чисел x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$.

А промежуток $[a; b)$ — это множество чисел x , удовлетворяющих условию $a \leq x < b$ (рис. 21).

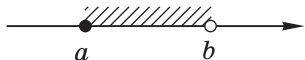


Рис. 21

Аналогично: промежуток $(a; b]$ — это множество чисел x , удовлетворяющих условию $a < x \leq b$ (рис. 22). Можно читать «промежуток от a до b , где a не принадлежит промежутку, а b принадлежит».

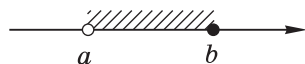


Рис. 22

Итак, множества $(a; b)$, $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b]$ называются **промежутками** (говорят также — **числовыми промежутками**).

При принятых обозначениях по записи всегда ясно, какой конец промежутка принадлежит ему, а какой не принадлежит. В устной речи это указывают дополнительно.

Похожая запись употребляется и для чисел x , удовлетворяющих неравенствам $x > a$; $x \geq a$; $x < a$; $x \leq a$. Для этого вводятся два знака: « $-\infty$ » (читается «минус бесконечность») и « $+\infty$ » (читается «плюс бесконечность»).

А

Символ бесконечности « ∞ », имеющий вид «лежащей восьмерки», впервые встречается в главном труде английского математика Джона Валлиса «Арифметика бесконечных величин», напечатанном в 1665 г. Почему Валлис выбрал именно этот символ для обозначения понятия бесконечности, неизвестно.

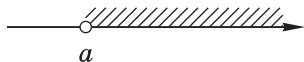


Рис. 23

При изображении чисел x на координатной прямой неравенство $x > a$ означает, что точка x расположена правее точки a (рис. 23). Иными

словами, точка (число) x лежит на луче с началом в точке a и расположена правее a , причем $x \neq a$. Множество всех таких точек (чисел) x обозначается $(a; +\infty)$ и читается «промежуток от a до плюс бесконечности, где a не принадлежит промежутку».

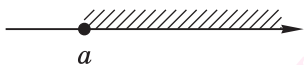


Рис. 24

Аналогично:

промежуток $[a; +\infty)$ — это множество чисел x , удовлетворяющих условию $x \geq a$ (рис. 24);

промежуток $(-\infty; a)$ — это множество чисел x , удовлетворяющих условию $x < a$ (рис. 25);

промежуток $(-\infty; a]$ — это множество чисел x , удовлетворяющих условию $x \leq a$ (рис. 26).



Рис. 25

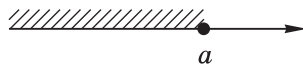


Рис. 26

Множества $(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$ тоже называются **числовыми промежутками**.

При принятых обозначениях всегда ясно, принадлежит или не принадлежит число a рассматриваемому промежутку. В устной речи это указывается дополнительно. Например, говорят: «Промежуток от 3 до плюс бесконечности, где 3 не принадлежит промежутку» — и при этом записывают: « $(3; +\infty)$ ».

В следующей таблице даны все обозначения числовых промежутков.

Условие, которому удовлетворяет число x	Обозначение числового промежутка	Изображение числового промежутка на координатной прямой
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	

Заметим, что для единообразия употребляется и обозначение множества всех действительных чисел $\mathbf{R}$ в виде промежутка $(-\infty; +\infty)$.

Тот факт, что число x принадлежит промежутку $(a; b)$, т. е. $a < x < b$, записывается с помощью знака принадлежности « $\in$ » так: $x \in (a; b)$.

Запись « $x \notin (a; b)$ » означает, что число x не принадлежит промежутку $(a; b)$. Аналогично для промежутков другого вида.

Рассмотрим множество чисел x , удовлетворяющих условию

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ или } x > 3. \quad (1)$$

Множество чисел x , удовлетворяющих условию $-1 \leq x \leq 2$, — это промежуток $[-1; 2]$, а множество чисел x , удовлетворяющих условию $x > 3$, — это промежуток $(3; +\infty)$. Множе-

ство чисел x , удовлетворяющих условию (1), обозначается $[-1; 2] \cup (3; +\infty)$. И читается «объединение промежутков $[-1; 2]$ и $(3; +\infty)$ ».

Замечание. В отличие от числовых промежутков для записи множества, состоящего из нескольких чисел, используют фигурные скобки. Например, множество из трех чисел $-7; 13,8; 20$ можно записать $\{-7; 13,8; 20\}$.

Запись $c \in \{1; 2\}$ означает, что $c = 1$ или $c = 2$.

Пример 1. а) Записать с помощью неравенств условие, которому удовлетворяет множество точек x заштрихованной части координатной прямой (рис. 27).

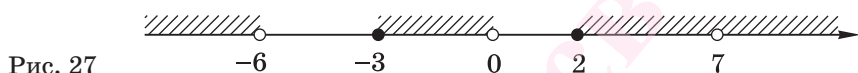


Рис. 27

б) Как обозначается множество точек заштрихованной части координатной прямой (см. рис. 27)?

Ответ: а) $x < -6$ или $-3 \leq x < 0$ или $2 \leq x < 7$ или $x > 7$;

б) $(-\infty; -6) \cup [-3; 0) \cup [2; 7) \cup (7; +\infty)$.

Пример 2. Какому числовому промежутку принадлежит число m , для которого выполняется условие:

а) $m \geq 0$ и $m \geq 5$;

б) $m \geq 0$ и $m < 1$;

в) $m < -2$ и $m \geq 0$;

г) $m \leq -2$ и $m < -4$;

д) $m \neq 7$?

Решение. По рисунку 28 видно, на каких промежутках выполняются сразу два неравенства, заданных условием, — для случаев а), б), г) они заштрихованы. В случае в) такого промежутка нет (см. рис. 28).

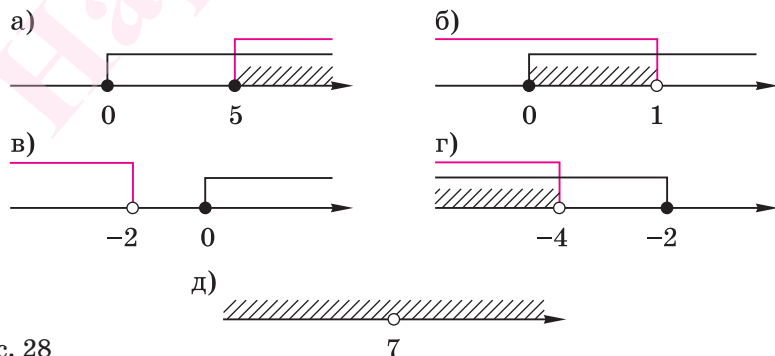


Рис. 28

В случае д) число m может быть любой точкой координатной прямой, кроме 7, т. е. $m \in (-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: а) $[5; +\infty)$; б) $[0; 1)$; в) такого промежутка нет; г) $(-\infty; -4)$; д) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$.



1. Запишите обозначение числового промежутка, которому принадлежат все числа x , удовлетворяющие условию:

- | | | |
|---------------------|------------------|------------------------|
| а) $a < x \leq b$; | б) $a < x < b$; | в) $a \leq x \leq b$; |
| г) $a \leq x < b$; | д) $x < a$; | е) $x > a$; |
| ж) $x \leq a$; | з) $x \geq a$; | и) $x \neq a$. |

2. Как можно обозначить множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ в виде числового промежутка?

Упражнения

2.22°. Прочитайте запись:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|------------------|
| 1) $(8; 14)$; | 2) $[-4; 19]$; | 3) $(0; 7)$; |
| 4) $[-1; 3]$; | 5) $(-10; -1)$; | 6) $[-100; 1]$; |
| 7) $6 \in (0; 6]$; | 8) $-5 \in [-9; 8]$; | |
| 9) $-13 \notin (-7; 7)$; | 10) $12 \notin [-4; -1]$. | |

2.23°. По рисунку 29 запишите с помощью неравенств условие, которому удовлетворяет множество точек m заштрихованной части координатной прямой, и запишите это множество с помощью промежутков.

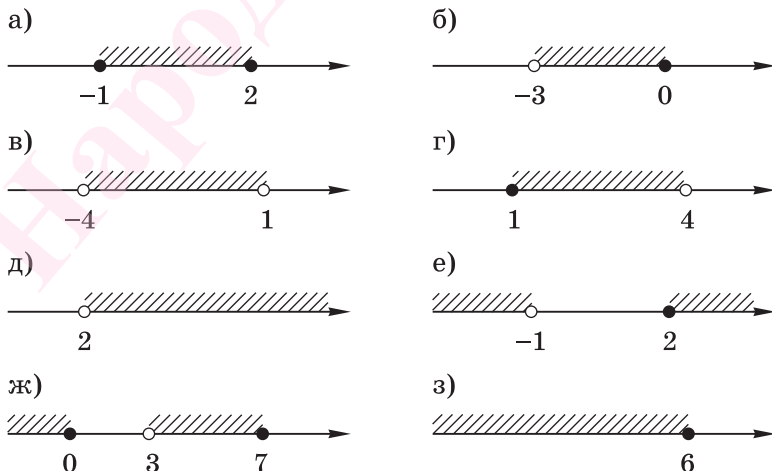


Рис. 29

2.24°. Изобразите на координатной прямой промежутки:

- | | | |
|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1) $(2; 5)$; | 2) $[-3; 4)$; | 3) $(-5; 1]$; |
| 4) $[0; 6]$; | 5) $[-1; 4]$; | 6) $(0; 3]$; |
| 7) $[-2; 4]$; | 8) $(-1; 3)$; | 9) $(-\infty; 2]$; |
| 10) $(-3; +\infty)$; | 11) $[5; +\infty)$; | 12) $(-\infty; -4)$. |

Отметьте штриховкой на координатной прямой множество чисел q , удовлетворяющих условию, и запишите его с помощью промежутков (**2.25—2.26**).

- 2.25°.** 1) $q \leq 0$ или $q > 6$; 2) $q > 3$;
3) $q \geq 4$; 4) $q < 7$ или $q \geq 11$;
5) $-5 < q \leq 2$; 6) $6 \leq q < 9$;
7) $0 \leq q \leq 4$; 8) $-3 < q < 5$;
9) $-8 < q \leq 0$ или $1 \leq q < 4$;
10) $-12 \leq q \leq -3$ или $5 < q \leq 7$.

- 2.26°.** 1) $q \geq -2$ и $q > -1$; 2) $q < 8$ и $q \geq 6$;
3) $q > 2$ и $q < 18$; 4) $q \geq -4$ и $q \leq 4$;
5) $q \geq -4$ и $q < 6$; 6) $q > 0$ и $q < 6$;
7) $1 < q \leq 4$ и $q \leq -3$; 8) $-10 \leq q < -8$ и $q > -1$.

2.27°. С помощью знака принадлежности « $\in$ » запишите те числа из множества $\{-7; -4,1; -3; -2\frac{1}{9}; -2; -1; 0; 2\frac{1}{3}; 5; 6,8; 7\}$, которые принадлежат промежутку:

- | | |
|---------------------------|------------------------|
| 1) $(-3; 2\frac{1}{3})$; | 2) $[-4; 6,5)$; |
| 3) $(-\infty; 6,8]$; | 4) $(-1,2; +\infty)$. |

2.28. Из множества $\{-6; -3,9; -2; -1,01; \frac{1}{24}; 1; 3; 5; 6,9; 8,3\}$ выпишите числа, которые не принадлежат промежутку:

- | | |
|--------------------|------------------|
| 1) $(-6; -2)$; | 2) $[-2; 3]$; |
| 3) $[-3,9; 6,9]$; | 4) $(-6; 8,3)$. |

2.29°. Укажите три положительных и три отрицательных числа, которые: а) принадлежат промежутку; б) не принадлежат промежутку:

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 1) $(-2; 5)$; | 2) $[-2; 2]$; |
| 3) $[-1; \frac{1}{5})$; | 4) $(-0,2; +\infty)$. |

Укажите все целые числа, принадлежащие промежутку (2.30—2.31).

2.30°. 1) $[-7; -5]$; 2) $(6; 8,5)$; 3) $(-1; 3]$; 4) $(-1; 1)$.

2.31°. 1) $(-2,5; 4,8)$; 2) $(-0,9; 0,8)$;
3) $[-6; 2,3]$; 4) $[0; 2,6)$.

2.32°. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $[-17; -5]$; 2) $(-13; 15]$; 3) $(-\infty; 6)$;
4) $(-\infty; 5]$; 5) $[-4; 6]$; 6) $[-1; 2\frac{1}{3}]$;
7) $(12; +\infty)$; 8) $(0; \frac{2}{5})$.

2.33°. Укажите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

1) $[-3; 5]$; 2) $(-2; 7]$;
3) $[-2,5; +\infty)$; 4) $(-4,5; +\infty)$;
5) $[7,2; +\infty)$; 6) $[2; 11]$;
7) $(-\infty; -17)$; 8) $(-2\frac{1}{3}; -\frac{5}{2})$.

2.34°. Дан промежуток $[7,1; 8)$.

- 1) Принадлежит ли этому промежутку число 7,99?
- 2) Назовите три числа, большие 7,99 и принадлежащие промежутку.
- 3) Можно ли назвать наибольшее число из этого промежутка?
- 4) Можно ли назвать наибольшее целое число из этого промежутка?
- 5) Можно ли назвать наименьшее число из этого промежутка?
- 6) Можно ли назвать наименьшее целое число из этого промежутка?

Глава 3

НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Неравенства с одной переменной (с одним неизвестным). Линейные неравенства

Определение. Неравенство, содержащее одну переменную, называется *неравенством с одной переменной* или *неравенством с одним неизвестным*.

Решением неравенства с одной переменной (с одним неизвестным) называется такое значение переменной (неизвестного), при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Определение. Два неравенства называются *равносильными*, если каждое решение первого неравенства является решением второго неравенства, и наоборот — каждое решение второго неравенства является решением первого, т. е. если они имеют одни и те же решения.

Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.

Нетрудно заметить, что все эти определения, данные для неравенств с одной переменной, аналогичны уже знакомым нам определениям для уравнений с одной переменной.

Свойства неравенств с одной переменной получаются из свойств числовых неравенств.

1. Если в неравенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.

2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и заменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Используем эти свойства при решении неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{2x-7}{4} - \frac{9x+11}{8} < \frac{3-x}{2}.$$

Решение. На основании свойства 2, умножив обе части данного неравенства на 8, получим:

$$\begin{aligned} 8 \cdot \left(\frac{2x-7}{4} - \frac{9x+11}{8} \right) &< 8 \cdot \frac{3-x}{2}; \\ 2(2x-7) - (9x+11) &< 4(3-x). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки, запишем: $4x - 14 - 9x - 11 < 12 - 4x$.

По свойству 1 перенесем все члены неравенства, содержащие x , в левую часть, а все числа — в правую:

$$4x - 9x + 4x < 12 + 14 + 11, \text{ откуда } -x < 37.$$

На основании свойства 3, умножив обе части последнего неравенства на -1 , получим $x > -37$.

Ответ: $x > -37$.

Подчеркнем, что все неравенства, которые получились в ходе решения этого примера, равносильны (поясните почему).

Решение неравенств будем оформлять, как в примерах 2 и 3.

Пример 2. Решить неравенство:

$$\text{а) } 3x - 2 > 17; \quad \text{б) } 7 - 5x \geq 37.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } 3x - 2 > 17; & \quad \text{б) } 7 - 5x \geq 37; \\ 3x > 2 + 17; & \quad -5x \geq 37 - 7; \\ 3x > 19; & \quad x \leq 30 : (-5); \\ x > 6\frac{1}{3}. & \quad x \leq -6. \end{aligned}$$

Ответ: $x > 6\frac{1}{3}$.

Ответ: $x \leq -6$.

Пример 3. Решить неравенство:

$$\text{а) } 8x + 5 < 2(4x + 1); \quad \text{б) } 8x + 5 > 2(4x + 1).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } 8x + 5 < 2(4x + 1); & \quad \text{б) } 8x + 5 > 2(4x + 1); \\ 8x + 5 < 8x + 2; & \quad 8x + 5 > 8x + 2; \\ 8x - 8x < 2 - 5; & \quad 8x - 8x > 2 - 5; \\ 0 \cdot x < -3 \text{ — неверно} & \quad 0 \cdot x > -3 \text{ — верно} \\ \text{при любых значениях } x. & \quad \text{при любых значениях } x. \end{aligned}$$

Ответ: решений нет.

Ответ: x — любое число.

Исходное неравенство из примера 2 а) равносильно неравенству $3x > 19$ (см. решение). Такие неравенства называются **линейными**. Линейными называются и неравенства

$$-5x \geq 30; \quad 0 \cdot x < -3; \quad 0 \cdot x > -3,$$

к которым мы приходим, решая неравенства из примеров 2 б), 3 а) и 3 б).

Определение. *Линейным неравенством с одной переменной (с одним неизвестным) называется неравенство вида*

$$ax > b \quad (ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b), \quad (1)$$

где a и b — числа, x — переменная (неизвестное).

Рассмотрим еще примеры линейных неравенств.

Пример 4. Решить неравенство:

а) $0 \cdot x > 0$; б) $0 \cdot x \geq 0$;

в) $0 \cdot x < 0$; г) $0 \cdot x \leq 0$.

Решение. а) Подставив вместо x любое число, получим неверное числовое неравенство $0 > 0$, значит, неравенство $0 \cdot x > 0$ не имеет решений.

б) Подставив вместо x любое число, получим верное числовое неравенство $0 \geq 0$, значит, решением неравенства $0 \cdot x \geq 0$ является любое число.

Неравенства в) и г) решаются аналогично (проделайте это самостоятельно).

Ответ: а) решений нет; б) x — любое число;

в) решений нет; г) x — любое число.

▲ **Пример 5.** Решить относительно x неравенство

$$(m - 3)x > 5. \quad (2)$$

Решение. Если $m - 3 > 0$, т. е. $m > 3$, то, разделив обе части неравенства (2) на положительное число $m - 3$, получим равносильное ему неравенство

$$x > \frac{5}{m - 3}.$$

Если $m - 3 = 0$, т. е. $m = 3$, то неравенство (2) примет вид $0 \cdot x > 5$, а это неравенство не имеет решений (поясните почему).

Если $m - 3 < 0$, т. е. $m < 3$, то, разделив обе части неравенства (2) на отрицательное число $m - 3$, получим равносильное ему неравенство

$$x < \frac{5}{m-3}.$$

Ответ: если $m < 3$, то $x < \frac{5}{m-3}$; если $m = 3$, то решений нет; если $m > 3$, то $x > \frac{5}{m-3}$. ▲

Пример 6. Решить неравенство $\frac{7x^6+2}{3x-8} \geq 0$.

Решение. Так как при любых значениях x числитель $7x^6 + 2$ — положительное число и дробь по условию неотрицательная, то знаменатель дроби должен быть положительным, т. е. $3x - 8 > 0$, откуда получим $x > 2\frac{2}{3}$.

Ответ: $x > 2\frac{2}{3}$.



1. Приведите примеры неравенств с одной переменной.
2. Что называется решением неравенства с одной переменной?
3. Что значит решить неравенство?
4. Какие два неравенства называются равносильными?
5. Равносильны ли неравенства $x^4 + 1 < 0$ и $5 - x^2 \geq 7$?
6. Какие свойства неравенств используются при решении неравенства с одной переменной?
7. Какое неравенство называется линейным?
- 8*. Решите неравенство $mx > p$, если:

а) $m > 0$;	б) $m < 0$;	в) $m = 0, p > 0$;
г) $m = 0, p < 0$;	д) $m = p = 0$.	

Упражнения

3.1°. Равносильны ли неравенства:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $15x > -30$ и $x > -2$; | 2) $-6x \leq 36$ и $x \geq -6$; |
| 3) $-7x \leq 49$ и $x \geq -7$; | 4) $5x > 25$ и $x < 5$; |
| 5) $3 \leq x + 9$ и $x \geq -6$; | 6) $-9 \geq 6 - x$ и $x \geq 15$; |
| 7) $-4 < \frac{x}{3}$ и $x > -12$; | 8) $\frac{x}{2} > 8$ и $x < 16$? |

3.2°. Какие из чисел $-5, -3, -1, 0, 1, 2$ являются решениями неравенства:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $5 - 4x \geq 6$; | 2) $2 \leq 3x + 4$; |
| 3) $6 - 5x > 5x - 2$; | 4) $4x - 2 < 5 - 4x$? |

Решите неравенство (3.3—3.5).

3.3°. 1) $x + 5 \geq 3$; 2) $6 + x < 14$;
3) $12x \geq -36$; 4) $-7x < 56$;
5) $x - 6 < 8$; 6) $3 \leq x + 7$;
7) $-3 > 5 - x$; 8) $x - 5 > -6$;
9) $\frac{x}{4} \leq 8$; 10) $-5 < \frac{x}{2}$.

3.4°. 1) $3y + 15 \geq 6$; 2) $3 + 12y < 27$;
3) $1 - 4x < 5$; 4) $8 \leq 13 - 5x$;
5) $2x - 4 \leq 0$; 6) $3x - 5 > 13$;
7) $-6x + 2 < 14$; 8) $-4x + 8 \geq 0$;
9) $2(2x + 3) < 6$; 10) $(4 - 2x)3 \geq 12$.

3.5°. 1) $3(4x + 1) \geq 4x + 19$; 2) $4(x + 2) < 5x - 2$;
3) $4 - 8(x - 2) > 5 + 2x$; 4) $24 - 5(2x - 1) \leq 10x + 9$;
5) $13 - 2(1 - 3x) \leq 2x + 11$; 6) $7 - 3(4 + 3x) > 5(x - 1)$.

3.6°. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $y \leq -3$; 2) $y \leq 5$; 3) $y < 6$; 4) $y < -7$;
5) $\frac{y}{3} \leq 2$; 6) $\frac{y}{4} \leq -5$; 7) $\frac{2}{5} \geq \frac{y}{25}$; 8) $\frac{4}{9} \geq \frac{y}{18}$.

При каких значениях a будут положительными значения выражения (3.7—3.8)?

3.7. 1)° $4a - 24$; 2)° $5 - 3a$;
3)° $5a - 15$; 4)° $18 - 3a$;
5)° $2 - 5(a - 3)$; 6)° $3(a - 5) - 2(a - 1)$;
7) $\frac{3}{8}a - 4 - \frac{5a}{2}$; 8) $\frac{5}{2} - 4a + \frac{3a - 1}{4}$;
9) $\frac{a + 1}{2} - 2a + 2\frac{1}{2}$; 10) $\frac{3a + 1}{2} + \frac{21 - 2a}{3}$;
11) $\frac{5 - a}{8} + \frac{3 + 2a}{4}$; 12) $\frac{12 + a}{4} - \frac{a}{3} - 1$.

3.8. 1)° $7a + 49$; 2)° $25 - 5a$;
3)° $21a - 3$; 4)° $7 - 14a$;
5)° $5(a - 3) - 2(3a - 1)$; 6)° $4(2a - 1) - 3(5 - 2a)$;
7)° $5 - \frac{2}{3}a$; 8)° $\frac{3}{4} - 2a$;
9) $\frac{a - 2}{3} + \frac{a}{2}$; 10) $\frac{8a - 3}{5} - \frac{2a}{3}$.

Решите неравенство (3.9—3.11).

3.9. 1)° $2(3x + 4) - 1 < 7 + 8x$;

2)° $3(2x - 7) - 1 \leq 4(2x - 1) + 3$;

3) $\frac{x-1}{5} - x \geq \frac{x+1}{2}$;

4) $x - \frac{x-1}{3} > \frac{x+1}{2}$.

3.10. 1)° $x + 4 > 2 - 3x$;

2)° $3 + 5x \leq 7x + 4$;

3)° $4(x - 1) \geq 2 + 7x$;

4)° $3(x - 2) < 4x - 9$;

5) $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$;

6) $\frac{x}{5} + 12,55 \geq 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x$;

7) $\frac{37-2x}{3} + 9 \leq \frac{3x-8}{4} - x$;

8) $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x-3}{6}$.

3.11. 1) $\frac{c}{5} - 3\frac{1}{3} \geq 1\frac{3}{4} - 3\frac{13}{15}c$;

2) $\frac{37-2y}{3} - 9 < \frac{3y-3\frac{1}{3}}{4} - y$;

3) $\frac{3p}{2} - \frac{3}{5} < 4p - 3$;

4) $3 - \frac{3k}{2} \geq \frac{5}{8} - \frac{4k-3}{6}$.

3.12. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1)° $x + 2 \geq 2,5x - 1$;

2)° $3x + 2 - 2(x - 3) \leq 12$;

3) $x - \frac{x+4}{4} + \frac{3x-1}{2} < 3$;

4) $\frac{9x+2}{10} - \frac{10x-2}{9} > 2$.

3.13. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $5(x - 3) - 1 > 2(x - 3) - 2(x + 1)$;

2) $\frac{5x}{11} - \frac{x-2}{4} \geq 3$;

3) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} > 1 - \frac{x}{7}$;

4) $\frac{2x-5}{3} - 1 \geq 3 - x$;

5) $\frac{7-6x}{2} + 12 \geq \frac{8x+1}{3} + 10x$;

6) $8 - \frac{3x-4}{5} \leq \frac{x-3,5}{6} - \frac{5x-3}{8}$.

Решите неравенство (3.14—3.17).

- 3.14°.** 1) $0 \cdot y > -3$; 2) $0 \cdot y < -5$;
3) $0 \cdot x \leq 0$; 4) $0 \cdot x \geq 0$;
5) $0 \cdot z \geq 3$; 6) $0 \cdot z \leq 6$;
7) $0 \cdot x \leq -2$; 8) $0 \cdot x \leq -8$;
9) $0 \cdot t \leq 7$; 10) $0 \cdot t \geq 9$.

- 3.15°.** 1) $25x - 5 \cdot 5x \geq 0$; 2) $3 \cdot (-4x) + 12x \leq 0$;
3) $4^3x - (-2)^6x < 0$; 4) $-5 \cdot 5^2 \cdot x - 25(-5) \cdot x \geq 0$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 x - \frac{4}{9}x > 0$; 6) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 x - \frac{25}{49}x < 0$;
7) $2 \cdot 3x - 6x \leq 0$; 8) $8x - 2 \cdot 4x > 0$.

- 3.16°.** 1) $3x + (6 - 3x) \geq 4$;
2) $(5 - 2x) + 2x \geq 3$;
3) $2(x - 2) - 4\left(1 - \frac{1}{2}x\right) < 4$;
4) $3(5x + 3) + 2(1 - 6x) < 6 + 3x$.

- 3.17.** 1)° $-6y < 0$; 2)° $-2y > 0$; 3)° $-7y \leq 0$;
4)° $-9y \geq 0$; 5) $|y + 4| \leq 0$; 6) $|y + 5| \geq 0$;
7) $(y + 2)^2 \leq 0$; 8) $(y - 3)^2 > 0$; 9) $y^2 + 1 \geq 0$;
10) $4y^2 + 5 \leq 0$; 11) $-6y^2 - 3 > 0$; 12) $-9 - 4y^2 \leq 0$.

3.18. При каких значениях переменной x :

- 1) значения суммы дробей $\frac{x-2}{4}$ и $\frac{2+x}{5}$ больше 4;
2) значения разности дробей $\frac{3x-1}{6}$ и $\frac{x+2}{9}$ меньше 21?

3.19. При каких значениях переменной x :

- 1) значения разности выражений $8 - 4(2 - 5x)$ и $5x + 6$ отрицательные;
2) значения суммы выражений $2(x - 1)$ и $3x - 2$ положительные?

Решите неравенство (3.20—3.23).

- 3.20.** 1) $(x - 1)^2 + 7 \geq (x + 4)^2$; 2) $(1 + x)^2 + 3x^2 \leq (2x - 1)^2 + 12$;
3) $x(x + 3) \leq (x + 1)(x + 3)$; 4) $x^2 + x < x(x + 6) + 6$.

- 3.21. 1) $a(a+2) < (a-2)(a+3)$; 2) $a(a+6) \geq (a+1)(a+4)$;
 3) $(a-3)^2 \leq a(a-5)$; 4) $a(a+3) < (a+3)^2$.
- 3.22*. 1) $(x^2+6)(2x-8) \geq 0$; 2) $(2x^2+10)(3x-12) < 0$;
 3) $(6x-1)(-x^2-2) \leq 0$; 4) $(-x^2-9)(25x-5) > 0$;
 5) $(-1)^3(x^2+1)(4x+8) > 0$; 6) $(x^2+3)(7x+49)(-1)^5 \leq 0$.

- 3.23*. 1) $\frac{-13}{2x-7} \geq 0$; 2) $\frac{23}{9x-72} \leq 0$;
 3) $\frac{2}{3-4x} \geq 0$; 4) $\frac{-4}{5-2x} \geq 0$;
 5) $\frac{2x^4+5}{2x-6} \leq 0$; 6) $\frac{7-14x}{5x^2+3} \leq 0$;
 7) $\frac{3-5x}{9x^2+1} \leq 0$; 8) $\frac{3x^6+8}{8-24x} \geq 0$.

3.24. При каких значениях m значения выражения:

- 1) $\frac{m+1}{2} - 2 + 2\frac{1}{2}$ — отрицательные;
 2) $\frac{5}{7}m - 4 + 2$ — положительные;
 3) $\frac{5-m}{8} + \frac{3+2m}{4}$ — неположительные;
 4) $\frac{3m-5}{2} - \frac{2m-1}{3} + 2$ — неотрицательные?

3.25*. При каких значениях c уравнение:

- 1) $5(x-3) = 3(3x-2c)$ имеет положительный корень;
 2) $7-c = 2(x-1)$ имеет корень, удовлетворяющий условию $x < 2$;
 3) $\frac{x-5}{2} = \frac{4x-c}{3}$ имеет корень, удовлетворяющий условию $-3 \leq x \leq 1$;
 4) $\frac{3x-15}{2} = \frac{12x-3c}{3}$ имеет неположительный корень?

3.26. Решите неравенство:

- 1) $k+3 > k$; 2) $k-5 < k$; 3) $k > -k$;
 4) $-k > k$; 5) $k^3 > 0$; 6) $k^2 > 0$;
 7) $k^3 < 0$; 8) $k^2 < 0$.

3.27*. Решите неравенство с переменной x :

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $kx \geq 2$ при $k < 0$; | 2) $kx \leq 7$ при $k > 0$; |
| 3) $5x < p - 8$; | 4) $6x > p + 5$; |
| 5) $(3 + p)x \leq -1$ при $p < -5$; | 6) $(p - 4)x \geq -9$ при $p < 1$; |
| 7) $(k - 1)x > c$ при $k > 2$; | 8) $(k + 2)x < 2c$ при $k > 10$. |

3.28. На координатной прямой отметьте штриховкой множество точек x , удовлетворяющих условию:

- 1) $6x < -18$ или $5x - 4 \geq 21$;
- 2) $6x \leq -18$ или $5x - 4 > 21$;
- 3) $7x + 2 > 23$ или $4 + 6x \leq 22$;
- 4) $7x + 2 > 23$ или $4 - 6x > 28$.

3.2. Система неравенств с одной переменной

Допустим, что нам надо найти все такие значения переменной x , при каждом из которых неравенства

$$3x \geq 6 \text{ и } 2x - 3 < 3$$

обращаются в верные числовые неравенства. В этом случае говорят, что надо решить *систему неравенств*

$$\begin{cases} 3x \geq 6, \\ 2x - 3 < 3. \end{cases}$$

Определение. Пусть надо решить систему из двух неравенств с одной переменной.

Значения переменной (неизвестного) x , при которых оба неравенства обращаются в верные числовые неравенства, называются *решениями системы неравенств*.

Решить систему неравенств означает найти все ее решения или доказать, что их нет.

Определение. Две системы неравенств называются *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй системы, и наоборот — каждое решение второй системы является решением первой, т. е. если они имеют одни и те же решения.

Равносильными называются и системы неравенств, которые не имеют решений.

Пример 1. Решить систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x \geq 6, \\ 2x - 3 < 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x > 6, \\ 2x - 3 > 3. \end{cases}$$

Решение. а) Решив каждое из неравенств данной системы, получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 3. \end{cases} \quad (1)$$

Для значений переменной x , которые являются решениями системы (1), верны оба неравенства: $x \geq 2$ и $x < 3$. А это, как мы знаем, записывается двойным неравенством $2 \leq x < 3$.

Проиллюстрируем решение этой системы рисунками.

Решения неравенства $x \geq 2$ — это множество координат точек, лежащих на координатной прямой справа от точки 2, и число 2 (рис. 30). Неравенство нестрогое, поэтому число 2 тоже является его решением; на координатной прямой оно отмечено черным (закрашенным) кружком.

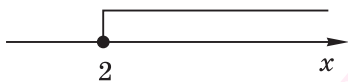


Рис. 30

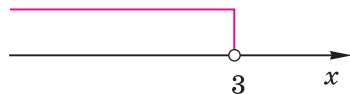


Рис. 31

Решения неравенства $x < 3$ — это множество координат точек, лежащих на координатной прямой слева от точки 3. Неравенство строгое, поэтому число 3 не является его решением; на координатной прямой оно отмечено светлым (незакрашенным) кружком (рис. 31).

На рисунке 32 штриховкой отмечено множество тех точек, координаты которых являются решениями обоих неравенств: $x \geq 2$ и $x < 3$.

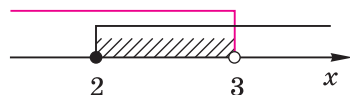


Рис. 32

б) Решив каждое из неравенств данной системы, получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} x > 2, \\ x > 3. \end{cases} \quad (2)$$

Если для некоторого значения переменной x верно неравенство $x > 3$, то для этого значения верно неравенство $x > 2$. Поэтому каждое решение неравенства $x > 3$ является решением системы (2); других решений у системы (2) нет.

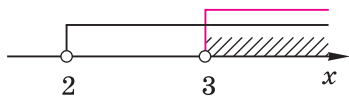


Рис. 33

На рисунке 33 на координатной прямой штриховкой отмечены решения системы, т. е. те значения x , при которых обращаются в верные числовые неравенства оба неравенства этой системы.

Ответ: а) $2 \leq x < 3$; б) $x > 3$.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x \leq 9, \\ 2x - 3 \geq 3. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} 3x \leq 9, \\ 2x - 3 \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 3. \end{cases}$

Решением системы неравенств является единственное число 3.

Ответ: 3.

Пример 3. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x < 9, \\ 2x - 3 > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x \leq 6, \\ 2x - 3 > 3. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} 3x < 9, \\ 2x - 3 > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x > 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x \leq 6, \\ 2x - 3 > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 3. \end{cases}$

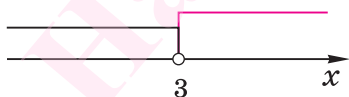


Рис. 34

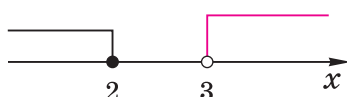


Рис. 35

(Рисунки 34 и 35 помогают увидеть, почему системы неравенств а) и б) не имеют решений.)

Ответ: а) нет решений; б) нет решений.

Замечание. Рисунок при поиске решений системы неравенств делать не обязательно. Но в некоторых случаях без ри-

сунка «увидеть» решение системы неравенств бывает трудно, например, когда в системе больше двух неравенств.

Пример 4. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(1-x) < 8, \\ -3x \geq -12, \\ 0 \leq 3x. \end{cases}$$

Решение. Данная система равносильна системе неравенств:

$$\begin{cases} x > -3, \\ x \leq 4, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если для некоторого значения переменной x верно неравенство $x \geq 0$, то верно и неравенство $x > -3$. Поэтому система неравенств (3) равносильна системе

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

А эту систему можно записать двойным неравенством $0 \leq x \leq 4$.

Ответ: $0 \leq x \leq 4$.

Решение системы неравенств (3) проиллюстрировано на рисунке 36.

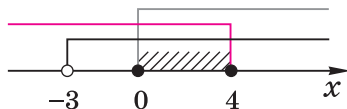


Рис. 36



Заметим, что, решая неравенства и системы неравенств, ответы можно записывать и с помощью числовых промежутков. Так, в примере 4 ответ $0 \leq x \leq 4$ можно записать в виде $[0; 4]$.



1. Какие значения переменной x называются решением системы неравенств $x > a$ и $x < b$?
2. Что значит решить систему неравенств с одной переменной?
3. Какие системы неравенств называют равносильными?

Упражнения

3.29°. Решите систему неравенств:

$$1) \begin{cases} x > 3, \\ x > 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x > 0, \\ x > -2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x > 6, \\ x \geq -1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x \leq 2, \\ x < -4; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x \leq -1, \\ x < 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x < -4, \\ x < -9; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x > 1, \\ x < 4; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -8; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x > 3, \\ x < -3. \end{cases}$$

3.30°. Запишите какую-нибудь систему неравенств, решения которой отмечены штриховкой на координатной прямой (рис. 37).

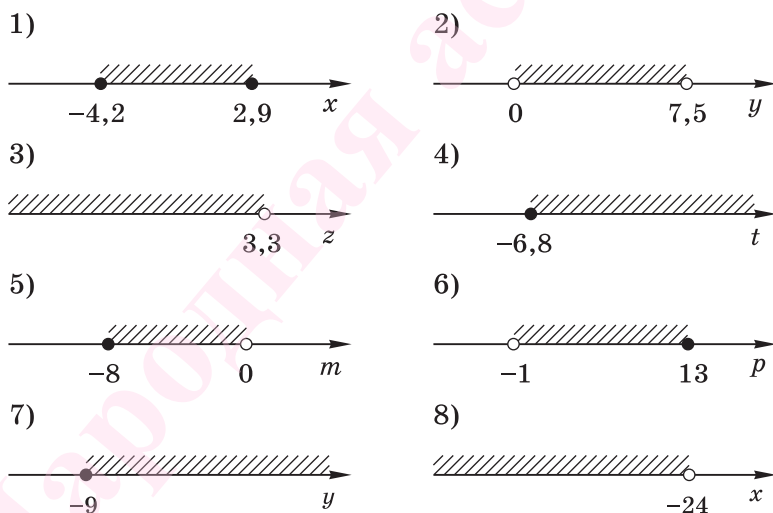


Рис. 37

Решите систему неравенств (3.31—3.34).

3.31°. 1) $\begin{cases} 6x \geq -18, \\ 5x - 4 < 21; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x > -18, \\ 5x - 4 \geq 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x < -18, \\ 5x - 4 \geq 21; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x \leq -18, \\ 5x - 4 < 21; \end{cases}$

$$5) \begin{cases} 7x + 2 \leq 23, \\ 4 + 6x \geq 22; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 7x + 2 < 23, \\ 4 + 6x \geq 22; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 7x + 2 > 23, \\ 4 - 6x > 28; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 7x + 2 > 23, \\ 4 - 6x < 28. \end{cases}$$

$$3.32. \quad 1) \begin{cases} 3 - 6x > 33, \\ -7x \geq -7, \\ 0 \leq 4x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2x + 4 < -8, \\ 3x - 1 \geq 2, \\ 5x \leq 40; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 8x - 2 \leq 6, \\ -12 \leq 3x, \\ \frac{x}{2} \leq 1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{1}{5}x + 2 > 1, \\ \frac{x}{3} < 4, \\ 0,1x \geq -1. \end{cases}$$

$$3.33. \quad 1) \begin{cases} 3x - 2 \geq 4x + 2, \\ 3x + 3 \geq 2x + 1; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x + 2 \leq 5x + 3, \\ 2 - 3x > 7 - 2x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2(x - 1) - 3 < 5(2x - 1) - 7x, \\ 3(x + 1) - 2 \leq 6(1 - x) + 7x; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 2 < 5(x + 1) - x, \\ 2(2x + 1) - x \geq 4(x + 1) - 2. \end{cases}$$

$$3.34. \quad 1) \begin{cases} \frac{3x - 8}{4} > \frac{4x - 5}{7}, \\ \frac{14x - 3}{2} > \frac{6 - x}{5}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3 - x}{3} \geq \frac{2x - 5}{4} - 2, \\ \frac{4 - x}{4} > \frac{5x + 1}{5}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{10x - 1}{3} < \frac{2 - 5x}{4} + \frac{5 - 3x}{6}, \\ \frac{5 + 4x}{5} \geq \frac{3 + 7x}{4} - \frac{2x + 1}{2}; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{3x + 2}{6} + \frac{3x - 2}{4} > \frac{2x - 1}{3} - 2\frac{1}{2}, \\ \frac{2x - 1}{4} - \frac{3x - 1}{2} < \frac{3 - x}{5} - \frac{2x - 5}{3}. \end{cases}$$

3.35. 1) Найдите все целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} 2(3x - 1) \leq 3(4x + 1) + 16, \\ 4(2 + x) < 3x + 10. \end{cases}$$

2) Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases} 21 - 4(x + 4) < 4x - 7(2x - 1), \\ 6 \geq -2(x + 1) + 3. \end{cases}$$

На координатной прямой отметьте штриховкой множество точек x , удовлетворяющих условию, и запишите это множество с помощью числовых промежутков (3.36—3.37).

3.36*. 1) $\frac{5-x}{3+x} < 0$; 2) $\frac{7-x}{5+x} > 0$;

3) $\frac{2x+7}{3x-6} \geq 0$; 4) $\frac{3x-9}{2x-8} \leq 0$.

3.37*. 1) $\begin{cases} x < 5, \\ x \geq -3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geq -3, \\ x > 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geq 4, \\ x < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < -5, \\ x \leq -7. \end{cases}$

3.38. На координатной прямой отметьте штриховкой множество точек x , удовлетворяющих условию:

1) $x < -6$ и $x \geq 2$;

2) $x \leq -4$ и $x > 0$;

3) $x < 16$ и $x > 10$;

4) $x < -2$ и $x > -9$;

5) $4x \geq 16$ или $6x + 9 < 44$;

6) $4x \leq 16$ или $6x + 9 > 44$;

7) $4x < 16$ или $6x + 9 \geq 44$;

8) $4x > 16$ или $6x + 9 \leq 44$.

Решите неравенство (3.39—3.42).

3.39°. 1) $-3 \leq 3x \leq 6$;

2) $-4 < 2x \leq 12$;

3) $-1 < -2x \leq 7$;

4) $-5 \leq -5x \leq 25$;

5) $-6 \leq -\frac{1}{3}x < -3$;

6) $-4 \leq \frac{1}{2}x < -2$;

7) $4 \leq \frac{2}{3}x < 8$;

8) $3 \leq -\frac{3}{4}x < 6$;

9) $-1 \leq 0,1x < 0$;

10) $0 < -0,2x < 2$;

11) $-2 \leq -0,3x \leq 1$;

12) $-1 < 0,4x \leq 2$.

- 3.40°.** 1) $-5 \leq x - 3 < -2$; 2) $-3 < x - 4 \leq 2$;
 3) $8 < \frac{y+2}{3} \leq 9$; 4) $2 < \frac{x+1}{2} < 5$;
 5) $6 \leq \frac{5-x}{2} \leq 7$; 6) $1 \leq \frac{2-x}{3} \leq 4$;
 7) $0,8 \leq 0,3 + x < 1,9$; 8) $-0,7 < 2,1 + x < 0,3$;
 9) $0 < 4 - y < 5$; 10) $-3 < 9 - y \leq 0$.
- 3.41.** 1) $0 \leq 4y - 3 < 9$; 2) $-4 < 6y - 2 \leq 0$;
 3) $-3 < \frac{7+2x}{5} < 5$; 4) $-1 < \frac{3y+4}{7} \leq 6$;
 5) $1 < 6 - 5y < 11$; 6) $1 \leq 4 - 3y < 10$;
 7) $2 < \frac{3x-1}{0,5} \leq 8$; 8) $-1 < \frac{2x+5}{2} < 5$.
- 3.42*.** 1) $7 < \frac{1}{x} < 14$; 2) $3 \leq \frac{1}{x} \leq 9$;
 3) $5 < \frac{1}{x} \leq 25$; 4) $8 \leq \frac{1}{x} < 16$.
- 3.43.** Найдите наибольшее целое решение неравенства:
 1) $6 \leq -3x < 9$; 2) $-10 < -5x < 25$;
 3) $1 \leq \frac{x-2}{5} - \frac{2x+3}{3} < 2$; 4) $4 \leq \frac{2x-8}{3} - \frac{3x-5}{2} < 6$.
- 3.44.** Найдите наименьшее целое решение неравенства:
 1) $-\frac{1}{3} \leq 3x < 6$; 2) $2 < -2x \leq 8$;
 3) $0 \leq \frac{x}{6} - \frac{x}{7} < 1$; 4) $0 \leq \frac{2x+2}{5} - \frac{x-1}{2} < 2$.
- 3.45*.** Найдите значения p , при которых уравнение имеет:
 а) положительный корень;
 б) корень, удовлетворяющий условию $2 < x \leq 3$:
 1) $6x = 36p$; 2) $x + 5 = p$;
 3) $x - 4 = 5p + 1$; 4) $2x - 6 = p - 2$.

3.46*. Найдите значения p , при которых уравнение имеет:

- а) отрицательный корень;
 б) корень, удовлетворяющий условию $-1 \leq x < 1$:

- 1) $4x = 8p$; 2) $x - 3 = p$;
 3) $2x - 5 = p + 1$; 4) $4x - 4 = 8p + 2$.

3.47. Составьте неравенство по условию задачи и решите его.

- 1) Найдите двузначное число, в котором цифра единиц на 2 больше цифры десятков, если известно, что это число меньше 60 и больше 50.
 2) Найдите двузначное число, кратное 5, если известно, что при прибавлении к нему 10 получится число меньше 100, но больше 90.

3.3. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля



Модуль числа x — это расстояние от начала отсчета до точки x на координатной прямой, т. е. $|x| \geq 0$. Поэтому условию $|x| = 0$ удовлетворяет только точка $x = 0$ и ни одна точка x координатной прямой не удовлетворяет условию $|x| = -3$.

Рассмотрим равенство $|x| = 6$. Оно означает, что расстояние от начала отсчета до точки x равно 6. Этому условию на координатной прямой удовлетворяют точки -6 и 6 (рис. 38).

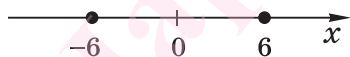


Рис. 38

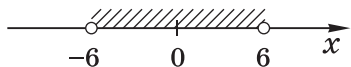


Рис. 39

Неравенство $|x| < 6$ означает, что расстояние от начала отсчета до точки x меньше 6. Другими словами, точка x лежит на координатной прямой между точками -6 и 6 (рис. 39), т. е. $-6 < x < 6$.

Таким образом, неравенства $|x| < 6$ и $-6 < x < 6$ имеют одни и те же решения, т. е. они *равносильны*.

Аналогичные рассуждения показывают, что *при положительном a :*



1) решениями строгого неравенства $|x| < a$ будут те и только те значения x , которые являются решениями неравенства $-a < x < a$;

2) решениями нестрогого неравенства $|x| \leq a$ будут те и только те значения x , которые являются решениями неравенства $-a \leq x \leq a$ (рис. 40).

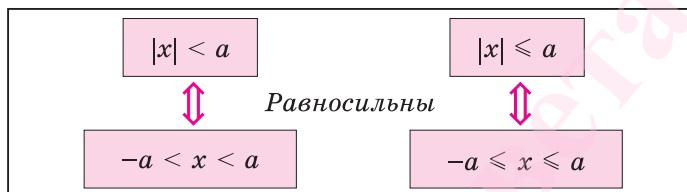


Рис. 40

Пример 1. Решить неравенство $|4x + 3| < 2$.

Решение. Пусть $4x + 3 = z$, тогда $|z| < 2$, т. е. $-2 < z < 2$ (рис. 41).

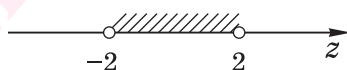


Рис. 41

Таким образом:

$$-2 < 4x + 3 < 2;$$

↓ прибавим ко всем частям неравенства -3 ↓

$$-5 < 4x < -1;$$

↓ разделим все части неравенства на 4 ↓

$$-\frac{5}{4} < x < -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-1\frac{1}{4} < x < -\frac{1}{4}$.

Ответ можно записать и так: $(-1\frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$.

Пример 2. Решить неравенство $|7 - 3x| \leq 5$.

Решение. Пусть $7 - 3x = z$, тогда $|z| \leq 5$, т. е. $-5 \leq z \leq 5$.

Таким образом:

$$\begin{aligned} -5 &\leq 7 - 3x \leq 5; \\ -5 - 7 &\leq -3x \leq 5 - 7; \\ -12 &\leq -3x \leq -2; \\ -12 : (-3) &\geq x \geq -2 : (-3); \\ 4 &\geq x \geq \frac{2}{3}; \\ \frac{2}{3} &\leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$.

Ответ можно записать и так: $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$.

Рассмотрим еще одно неравенство: $|x| > 6$. Оно означает, что расстояние от начала отсчета до точки x больше 6. Другими словами, точка x лежит на координатной прямой или левее точки -6 , или правее точки 6 (рис. 42), т. е. $x < -6$ или $x > 6$.

Таким образом, решениями неравенства $|x| > 6$ являются те и только те значения переменной x , которые являются решениями неравенства $x < -6$ или неравенства $x > 6$.

Аналогичные рассуждения показывают, что при положительном a :



- 1) решениями строгого неравенства $|x| > a$ будут те и только те значения x , которые являются решениями неравенства $x < -a$ или неравенства $x > a$;
- 2) решениями нестрогого неравенства $|x| \geq a$ будут те и только те значения x , которые являются решениями неравенства $x \leq -a$ или неравенства $x \geq a$ (рис. 43).

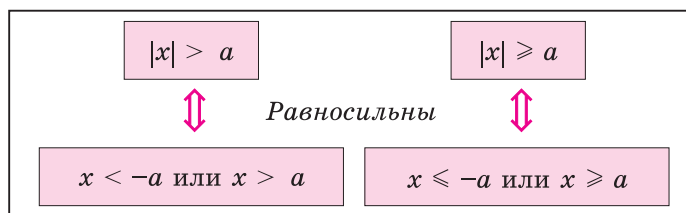


Рис. 43

Пример 3. Решить неравенство $|4x - 2| > 5$.

Решение. Пусть $4x - 2 = z$, тогда $|z| > 5$, т. е. $z < -5$ или $z > 5$.
Таким образом:

$$4x - 2 < -5 \quad \text{или} \quad 4x - 2 > 5;$$

$$4x < -5 + 2 \quad \text{или} \quad 4x > 5 + 2;$$

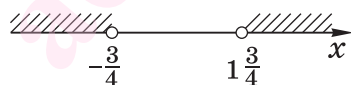
$$4x < -3 \quad \text{или} \quad 4x > 7;$$

$$x < -\frac{3}{4} \quad \text{или} \quad x > \frac{7}{4}.$$

Ответ: $x < -\frac{3}{4}$ или $x > 1\frac{3}{4}$.

Ответ можно записать и так:

$$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup \left(1\frac{3}{4}; +\infty\right).$$



Решение неравенства проиллюстрировано на рисунке 44.

Рис. 44

Пример 4. Решить неравенство $|7 - 2x| \geq 3$.

Решение. Поскольку $|7 - 2x| = |2x - 7|$, то $|2x - 7| \geq 3$.

Пусть $2x - 7 = t$, тогда $|t| \geq 3$, т. е. $t \leq -3$ или $t \geq 3$.

Таким образом:

$$2x - 7 \leq -3 \quad \text{или} \quad 2x - 7 \geq 3;$$

$$2x \leq -3 + 7 \quad \text{или} \quad 2x \geq 3 + 7;$$

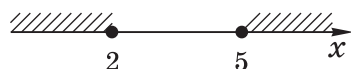
$$2x \leq 4 \quad \text{или} \quad 2x \geq 10;$$

$$x \leq 2 \quad \text{или} \quad x \geq 5.$$

Ответ: $x \leq 2$ или $x \geq 5$.

Ответ можно записать и так:

$$(-\infty; 2] \cup [5; +\infty).$$



Решение неравенства проиллюстрировано на рисунке 45.

Рис. 45



1. Какому неравенству при $a > 0$ равносильно неравенство:
 - а) $|x| < a$; б) $|x| \leq a$?
2. Какие значения переменной x при $a > 0$ являются решением неравенства:
 - а) $|x| > a$; б) $|x| \geq a$?
3. Как сформулировать свойства 1—3 (см. п. 3.1) о равносильности для двойных неравенств с одной переменной?
4. Чему равно p , если известно, что:
 - а) неравенство $|x| \leq p$ имеет единственное решение;
 - б) решением неравенства $|x| \geq p$ является любое число?

Упражнения

3.48°. По рисунку 46 запишите с помощью неравенств условие, которому удовлетворяет множество точек x заштрихованной части координатной прямой.

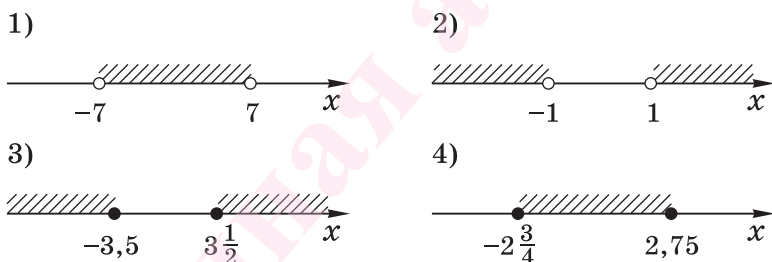


Рис. 46

3.49°. Решите неравенство и проиллюстрируйте решение на координатной прямой:

- 1) $|-x| < 5$; 2) $|x| \geq 5$; 3) $|2x| \geq 7$;
- 4) $|-3x| < 12$; 5) $|3-x| \leq 4$; 6) $|5-x| > 2$.

3.50°. На координатной прямой выделите штриховкой участки, на которых может находиться точка x , если:

- 1) $x < 2$ или $3 \leq x \leq 4$ или $x \geq 6$;
- 2) $-7 \leq x < 0$ или $1 \leq x \leq 5$ или $x > 7$;
- 3) $-4,5 < x < -3$ или $5 < x < 7,5$;
- 4) $-8 \leq x < -2$ или $x \geq 6$;
- 5) $x < -4$ или $-4 < x < 2$;
- 6) $3 < x < 4$ или $x > 4$.

3.51°. Верно ли, что неравенство $|k| \geq 9$ равносильно утверждению:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $k \geq 9$; | 2) $-9 \leq k \leq 9$; |
| 3) $k \geq -9$ или $k \leq 9$; | 4) $k \leq -9$; |
| 5) $k \leq -9$ и $k \geq 9$; | 6) $k \leq -9$ или $k \geq 9$? |

3.52°. Верно ли, что неравенство $|m| < 5$ равносильно утверждению:

- | | |
|---------------------------|------------------|
| 1) $m < -5$ или $m > 5$; | 2) $0 < m < 5$; |
| 3) $-5 < m < 5$; | 4) $m < 5$? |

3.53°. Верно ли, что:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) если $p < -5$, то $ p < 5$; | 2) если $p < -5$, то $ p > 5$; |
| 3) если $p > -5$, то $ p > 5$; | 4) если $p > -5$, то $ p < 5$; |
| 5) если $p < 5$, то $ p < 5$; | 6) если $p < 5$, то $ p > 5$; |
| 7) если $p > 5$, то $ p > 5$; | 8) если $p > 5$, то $ p < 5$? |

3.54°. При каких значениях x верно утверждение:

- | | | |
|----------------|------------------|-------------------|
| 1) $ x = 3$; | 2) $ x = 4,2$; | 3) $ x \leq 6$; |
| 4) $ x > 3$; | 5) $ x > 13$; | 6) $ x \leq 8$? |

Решите неравенство (3.55—3.61).

- 3.55°.**
- | | | |
|---------------------|-------------------|----------------------|
| 1) $ y \leq -7$; | 2) $ y \geq 0$; | 3) $ y \leq 0$; |
| 4) $ y > 6,3$; | 5) $ y > 2$; | 6) $ y < -12$; |
| 7) $ y \leq 0,1$; | 8) $ y < 0$; | 9) $ y > 0$; |
| 10) $ y \geq -7$; | 11) $ y > -3$; | 12) $ y \leq 0,9$. |

- 3.56°.**
- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1) $ x + 3 \leq 4$; | 2) $ x + 4 < 5$; |
| 3) $ x - 1 > 2$; | 4) $ x - 5 \geq 6$; |
| 5) $ x + 2,3 < 6$; | 6) $ x + 1,9 \leq 1$; |
| 7) $ x - 3,4 \geq 3,8$; | 8) $ x - 0,5 < 1,5$. |

3.57°. 1) $|3x| > 12$;

2) $|4x| \leq 8$;

3) $|\frac{1}{3}x| < 9$;

4) $|\frac{1}{5}x| \geq 2$;

5) $|\frac{5}{6}x| \geq \frac{1}{24}$;

6) $|\frac{8}{7}x| < \frac{32}{49}$;

7) $|3^{-2}x| \leq 9,17^0$;

8) $|2^{-3}x| > (-4,35)^0$.

3.58. 1) $|2x - 4| < 16$;

2) $|3x - 7| \geq 23$;

3) $|5x - 1| \geq 36$;

4) $|8x - 5| \leq 67$;

5) $|6 + 2x| > 10$;

6) $|8 + 3x| < 26$;

7) $|7 - 6x| \leq 17$;

8) $|9 - 2x| \geq 43$;

9) $|\frac{1}{2}x - 1| > 21$;

10) $|\frac{1}{3}x + 2| < 13$.

3.59. 1)° $|x - 5| > -1$;

2)° $|x + 3| \geq 0$;

3) $|4x + 12| > 0$;

4) $|3x - 6| \geq -2$;

5) $|5x - 4| < 0$;

6) $|10x - 3| < 0$;

7) $|13 - 2x| \geq 0$;

8) $|7 - 4x| \leq 0$;

9) $|7^0 + 4^{-1}x| \leq 0$;

10) $|4^0 + 5^{-1}x| > 0$.

3.60. 1) $\begin{cases} |x| < 3, \\ 2x \geq 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x| \geq 4, \\ 2x < 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| \geq 2, \\ |x| < 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} |x| < 7, \\ |x| \geq 3; \end{cases}$

5)* $\begin{cases} |x - 2| \leq 6, \\ |2x + 5| > 0; \end{cases}$

6)* $\begin{cases} |5 - 2x| > 0, \\ |x + 6| \geq 7. \end{cases}$

3.61*. 1) $\frac{3x^2 + 7}{|x| - 5} \geq 0$;

2) $\frac{6 - |x|}{2x^2 + 3} < 0$;

3) $\frac{|x| - 10}{|x| + 7} \leq 0$;

4) $\frac{|x| + 9}{|x| - 8} \geq 0$.

Глава 4

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

4.1. Корень n -й степени

Пятая степень какого числа равна 32? Нетрудно найти такое число — это 2. Число, пятая степень которого равна 32, называется *корнем 5-й степени* из числа 32.

Определение. Пусть $n \geq 2$. Корнем n -й степени из числа a называется такое число t , n -я степень которого равна a .

Таким образом, утверждение « t — корень n -й степени из a » означает, что

$$t^n = a.$$

Например, корень 5-й степени из числа 32 — это число 2, так как $2^5 = 32$. Корень 5-й степени из числа -32 — это число -2 , так как $(-2)^5 = -32$. Корень 5-й степени из числа 0 — это 0, так как $0^5 = 0$.

Корень 2-й степени называется еще *квадратным*. Корень 3-й степени называется еще *кубическим*.



Если n — нечетное число, то существует и притом единственный корень n -й степени из любого числа a ; он обозначается $\sqrt[n]{a}$.

В выражении $\sqrt[n]{a}$ число n называется *показателем корня*, а число a — *подкоренным выражением*.

Например, $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[5]{-32} = -2$; $\sqrt[7]{0} = 0$.



Корень любой степени из нуля равен нулю, т. е.

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров корней четной степени. Квадратные корни из числа $\frac{25}{49}$ — это числа $\frac{5}{7}$ и $-\frac{5}{7}$, так как $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$ и $\left(-\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$. Корни четвертой степени из числа 625 — это числа 5 и -5 , так как $5^4 = 625$ и $(-5)^4 = 625$.



Если n — четное число, то существуют два корня n -й степени из любого положительного числа a . Их модули равны, а знаки противоположны.

Корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Положительный корень четной степени n из положительного числа a обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[6]{64} = 2$.



Согласно определению корня n -й степени при любом значении a , при котором корень n -й степени из a существует, верно равенство

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

В 8-м классе мы изучим только квадратные корни, а корни любой степени n подробно рассмотрим в 11-м классе.

Как мы уже говорили, квадратным корнем из числа a называется такое число t , квадрат которого равен a , т. е. $t^2 = a$.

Таким образом, из любого положительного числа существует два квадратных корня.

Определение. Неотрицательный квадратный корень из числа a называется **арифметическим квадратным корнем из числа a** .



Арифметический квадратный корень из числа a обозначается $\sqrt{a}$ и читается «квадратный корень из a » (при чтении слово «арифметический» обычно опускается).

Например, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{0} = 0$.

Знак « $\sqrt{}$ » называется **знаком арифметического квадратного корня**.



Знак арифметического квадратного корня « $\sqrt{}$ » в современном виде был предложен в 1525 г. чешским математиком Кристофом Рудольфом в изданном им в Страсбурге учебнике алгебры. Этот учебник переиздавался до 1615 г., и по нему учился знаменитый Леонард Эйлер. Знак « $\sqrt{}$ » еще называют **радикалом**, от латинского слова *radikalis* — «коренной».

Извлечь арифметический квадратный корень из числа a — это значит найти значение выражения $\sqrt{a}$.

В устной речи слова «*квадратный корень из a* » допускают два толкования. Одно из них подразумевает указание двух взаимно противоположных чисел, а другое — одного неотрицательного числа; и только содержание текста позволяет различить, в каком смысле употребляются эти слова.

Очевидно, что нет такого числа, квадрат которого равен $-\frac{25}{49}$. Поэтому квадратного корня из числа $-\frac{25}{49}$ не существует.

И вообще, так как нет такого числа, квадрат которого был бы отрицательным, то **не существует квадратного корня из отрицательного числа**.



Так как квадратный корень из отрицательного числа не существует, то выражение $\sqrt{a}$ при $a < 0$ не имеет смысла.

Поэтому, например, не имеют смысла выражения

$$\sqrt{-9}, \quad \sqrt{-\frac{2}{3}}.$$

Пример 1. Найти квадратные корни из числа:

а) $(-113)^2$; б) p^6 .

Решение. а) Так как $(-113)^2 = 113^2$, то квадратными корнями из числа $(-113)^2$ являются числа 113 и -113 .

б) Так как $p^6 = (p^3)^2 = (-p^3)^2$, то квадратными корнями из числа p^6 являются числа p^3 и $-p^3$.

Ответ: а) -113 и 113 ; б) $-p^3$ и p^3 .

Пример 2. Решить уравнение $x^2 = 1,44$.

Решение. Так как $x^2 = 1,44$, то согласно определению квадратного корня x — квадратный корень из числа 1,44. Значит, $x = 1,2$ или $x = -1,2$, поскольку $1,2^2 = 1,44$ и $(-1,2)^2 = 1,44$.

Ответ: $-1,2$; $1,2$.

Пример 3. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x} = 11$; б) $\sqrt{x-9} = -5$.

Решение. а) Так как $11 \geq 0$, то согласно определению арифметического квадратного корня $x = 11^2$, т. е. $x = 121$.

б) Согласно определению арифметический квадратный корень неотрицателен, значит, равенство $\sqrt{x-9} = -5$ не может быть верным ни при каком значении x .

Ответ: а) 121; б) нет корней.

Пример 4. Верно ли, что любой квадратный корень из 49 равен $\sqrt{49}$?

Решение. Символом $\sqrt{49}$ обозначается только неотрицательный квадратный корень из 49, т. е. число 7 (таким образом, $\sqrt{49} = 7$). Но -7 также является квадратным корнем из 49, так как $(-7)^2 = 49$, однако -7 не равно $\sqrt{49}$.

Ответ: нет.

Пример 5. Доказать, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Решение. Согласно определению $(\sqrt{2})^2 = 2$. Но мы знаем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (см. п. 2.2). Значит, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. $\square$

Пример 6. Найти естественную область определения D выражения $\frac{3}{\sqrt{9+2x}}$.

Решение. Арифметический квадратный корень имеет смысл только при неотрицательных значениях подкоренного выражения. Кроме того, значение знаменателя дроби не может равняться нулю. Таким образом, значения переменной x должны удовлетворять условиям: $9+2x \geq 0$ и $\sqrt{9+2x} \neq 0$, а это равносильно неравенству $9+2x > 0$.

Решив его, получим: $2x > -9$, т. е. $x > -4,5$. Итак, множеству D принадлежат все значения x , удовлетворяющие неравенству $x > -4,5$. Множество D отмечено на рисунке 47 штриховкой.



Рис. 47

Ответ: $D = (-4,5; +\infty)$.

Пример 7. Найти естественную область определения D выражения:

а) $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$; б) $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$.

Решение. а) Выражение $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ имеет смысл, если имеют смысл оба выражения $\sqrt{x-1}$ и $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$, т. е. когда $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 2-x > 0 \end{cases}$ (поясните почему). Решая эту систему, получаем $1 \leq x < 2$ (рис. 48).

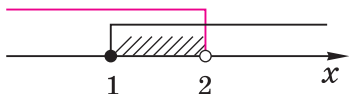


Рис. 48

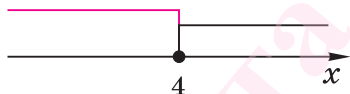


Рис. 49

б) Выражение $\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}$ имеет смысл, если имеют смысл оба выражения $\sqrt{x-4}$ и $\sqrt{4-x}$. Таким образом, значения переменной x должны удовлетворять неравенствам: $x-4 \geq 0$ и $4-x \geq 0$. Итак, находим область определения D из системы $\begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq 4, \end{cases}$ которая равносильна равенству $x = 4$ (рис. 49).

Таким образом, в области определения только одно число 4. Это записывают так: $D = \{4\}$.

Ответ: а) $D = [1; 2)$; б) $D = \{4\}$.



1. Что называется корнем n -й степени из числа a ?
2. Что называется квадратным (кубическим) корнем из числа a ?
3. Что обозначается символом $\sqrt[n]{a}$, если:
 - а) n — нечетное число; б) n — четное число?
4. Как обозначается неотрицательный квадратный корень из числа a ? Как он называется?
5. Почему не существует квадратного корня из отрицательного числа?
6. Два различных числа a и b являются квадратными корнями из числа c . Что можно сказать о числах a , b и c ?

Упражнения

Верно ли утверждение (4.1—4.2)?

- 4.1°. 1) -12 — квадратный корень из числа -144 ;
 2) $-1,3$ — квадратный корень из числа $1,69$;
 3) -3 — квадратный корень из числа 9 ;
 4) $-0,7$ — квадратный корень из числа $4,9$;

- 5) -3 — корень четвертой степени из числа 81;
- 6) -2 — корень четвертой степени из числа -16 ;
- 7) -2 — корень третьей степени из числа 8;
- 8) -3 — корень третьей степени из числа -27 .

- 4.2°. 1) 19 и -19 — квадратные корни из числа 361;
- 2) 2 и -2 — квадратные корни из числа -4 ;
- 3) 3,5 и $-3,5$ — квадратные корни из числа 9,25;
- 4) $\frac{2}{9}$ и $-\frac{2}{9}$ — квадратные корни из числа $\frac{4}{81}$;
- 5) $1\frac{2}{3}$ и $-1\frac{2}{3}$ — квадратные корни из числа $2\frac{7}{9}$;
- 6) 0,6 и $-0,6$ — квадратные корни из числа 3,6.

4.3. Найдите число a , если:

- 1) $\sqrt[3]{a} = -5$;
- 2) $\sqrt[5]{a} = -3$;
- 3) $\sqrt[6]{a} = 2$;
- 4) $\sqrt[8]{a} = 2$;
- 5) $\sqrt[10]{a} = 1$;
- 6) $\sqrt[13]{a} = -1$.

Найдите квадратные корни из числа (4.4—4.5).

- 4.4°. 1) 17^2 ;
- 2) 29^2 ;
- 3) $(-7)^2$;
- 4) $(-5)^2$;
- 5) $(-251)^2$;
- 6) $(-3003)^2$.
- 4.5°. 1) $6\frac{1}{4}$;
- 2) $3\frac{6}{25}$;
- 3) 0,36;
- 4) 1,69;
- 5) $(-\frac{2}{3})^2$;
- 6) $(-\frac{1}{2})^2$.

4.6. Существует ли корень n -й степени из a , если:

- 1) $a = -378$; $n = 13$;
- 2) $a = -754$; $n = 26$;
- 3) $a = -2175$; $n = 32$;
- 4) $a = -3124$; $n = 15$?

4.7°. Существует ли квадратный корень из числа:

- 1) -36 ;
- 2) 25;
- 3) 0,01;
- 4) $-0,0009$;
- 5) 0;
- 6) $-(-4)$?

4.8°. Представьте число в виде квадрата некоторого числа:

- 1) 49;
- 2) $\frac{16}{25}$;
- 3) $\frac{121}{169}$;
- 4) 100.

4.9°. Верно ли, что a является арифметическим квадратным корнем из числа b , если:

- 1) $a = 1,1$; $b = 1,21$;
- 2) $a = 0,4$; $b = 1,6$;
- 3) $a = -0,9$; $b = 0,81$;
- 4) $a = 0,5$; $b = -0,25$?

4.10°. Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна:

- 1) 25 см^2 ; 2) 121 мм^2 ; 3) $\frac{16}{49} \text{ мм}^2$;
4) $1\frac{9}{16} \text{ м}^2$; 5) $0,81 \text{ м}^2$; 6) $0,0001 \text{ см}^2$.

4.11°. Найдите длину ребра куба, если его объем равен:

- 1) 27 см^3 ; 2) 64 мм^3 ; 3) $\frac{8}{125} \text{ дм}^3$;
4) $\frac{27}{1000} \text{ м}^3$; 5) $0,064 \text{ м}^3$; 6) $0,125 \text{ дм}^3$.

Верно ли равенство (4.12—4.13)?

- 4.12°.** 1) $\sqrt{0,9} = 0,3$; 2) $\sqrt{0,09} = -0,3$;
3) $\sqrt{\frac{225}{9}} = 5$; 4) $\sqrt{3\frac{13}{81}} = -1\frac{7}{9}$;
5) $\sqrt{2,5} = 0,5$; 6) $\sqrt{(-7)^2} = -7$;
7) $\sqrt{9\frac{1}{16}} = 3\frac{1}{4}$; 8) $\sqrt{49\frac{4}{25}} = 7\frac{2}{5}$;
9) $\sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$; 10) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

- 4.13°.** 1) $\sqrt{64} = 8$; 2) $\sqrt{1000} = 100$;
3) $\sqrt{81} = -9$; 4) $\sqrt{36} = -6$;
5) $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}$; 6) $\sqrt{0} = 0$;
7) $\sqrt{\frac{9}{4}} = 1,5$; 8) $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \frac{4}{3}$;
9) $\sqrt{1,44} = 1,2$; 10) $\sqrt{0,09} = 0,3$;
11) $\sqrt{64} = -8$; 12) $\sqrt{-49} = -7$;
13) $\sqrt{2,25} = -1,5$; 14) $\sqrt{6,25} = 2,5$.

Вычислите (4.14—4.17).

- 4.14°.** 1) $\sqrt{0,09}$; 2) $\sqrt{0,01}$; 3) $\sqrt{0,0004}$;
4) $\sqrt{0,0025}$; 5) $\sqrt{0,49}$; 6) $\sqrt{0,0064}$.

- 4.15°. 1) $\sqrt{49} - \sqrt{16}$; 2) $\sqrt{25} + \sqrt{64}$;
 3) $\frac{\sqrt{256}}{8} + \frac{30}{\sqrt{225}}$; 4) $\frac{95}{\sqrt{361}} + \frac{34}{\sqrt{289}}$;
 5) $\sqrt{12-3} + \sqrt{12 \cdot 3}$; 6) $\sqrt{25-16} - \sqrt{40 \cdot 10}$;
 7) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{100} - \sqrt{6,25}$; 8) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,04} - \sqrt{1,96}$;
 9) $\sqrt{\sqrt{4} + 23} : \sqrt{6,25}$; 10) $\sqrt{\sqrt{16} + 21} : \sqrt{0,01}$.

- 4.16°. 1) $\sqrt{(7^2 - 2^2) : 5}$; 2) $\sqrt{(3^2 + 5^2) \cdot 8,5}$;
 3) $\sqrt{(12^2 + 4^2) : 10}$; 4) $\sqrt{(25^2 - 5^2) : 6}$;
 5) $\sqrt{3^3 - 2^5 + 3^2}$; 6) $\sqrt{5^3 - 7^2 + 2^2 + 1^2}$;
 7) $\sqrt{\sqrt{25} - 4}$; 8) $\sqrt{7 - \sqrt{9}}$;
 9) $\sqrt{\sqrt{36} + 3}$; 10) $\sqrt{\sqrt{4} + 7}$.

- 4.17°. 1) $\sqrt{\sqrt{1296}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{6561}}$; 3) $\sqrt{\sqrt{256}}$;
 4) $\sqrt{2\sqrt{64}}$; 5) $\sqrt{3\sqrt{144}}$; 6) $\sqrt{5\sqrt{400}}$;
 7) $\sqrt{2\sqrt{324}}$; 8) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{1024}}}$; 9) $\sqrt{9\sqrt{3\sqrt{729}}}$.

Имеет ли смысл выражение (4.18—4.19)?

- 4.18°. 1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{-9}$; 3) $-\sqrt{0,01}$;
 4) $\sqrt{(-5)^2}$; 5) $\sqrt{(-7)^3}$; 6) $\sqrt{-100}$;
 7) $\sqrt{-16^2}$; 8) $\sqrt{(-16)^2}$; 9) $\sqrt{(-1)^4}$;
 10) $\sqrt{-1,21}$; 11) $-\sqrt{(-1,3)^2}$; 12) $\sqrt{(-1)^7}$;
 13) $-\sqrt{-(-1)^8}$; 14) $-\sqrt{-(-1)^5}$;
 15) $\sqrt{(-49)^0}$; 16) $\sqrt{-49^0}$.

- 4.19°. 1) $-\sqrt{16 - \sqrt{121}}$; 2) $-\sqrt{-289 - \sqrt{1}}$; 3) $\sqrt{3 - \sqrt{16}}$;
 4) $\sqrt{\sqrt{121} - 10}$; 5) $\sqrt{2 - \sqrt{9}}$; 6) $\sqrt{4 - \sqrt{9}}$.

Найдите значение выражения (4.20—4.21).

- 4.20. 1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, если $a = 0,64$, $b = 0,01$;
 2) $\sqrt{a + b}$, если $a = -0,04$, $b = 0,13$;

3) $\sqrt{a\sqrt{b}}$, если $a = 144$, $b = 625$;

4) $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, если $a = 108$, $b = 169$.

4.21. 1) $\frac{6\sqrt{30+3a}}{\sqrt{4a+a^3}} + \frac{1}{5a-3\sqrt{2a}}$ при $a = 2$;

2) $\frac{5\sqrt{7a-13}}{\sqrt{2a^2+2}} - \frac{14}{4a+\sqrt{7a}}$ при $a = 7$;

3) $\left(\sqrt{25-7a} - \sqrt{19+\sqrt{5a+1}+\sqrt{2a-2}}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)$ при $a = 3$;

4) $\left(\sqrt{50-2a} + \sqrt{\sqrt{12a-3}+\sqrt{16+15a}-4}\right):\left(-\frac{14}{a}\right)$ при $a = 7$.

4.22. Сравните значения выражений $\sqrt{a^2 - b^2}$ и $a - b$ при:

1) $a = 13$, $b = 5$;

2) $a = 17$, $b = 15$;

3) $a = -13$, $b = -5$;

4) $a = -17$, $b = -15$.

4.23. Сравните значения выражений $\sqrt{a^2 - b^2}$ и $a + b$ при:

1) $a = -10$, $b = -6$;

2) $a = 5$, $b = -4$;

3) $a = 10$, $b = 6$;

4) $a = -5$, $b = 4$.

Решите уравнение (4.24—4.25).

4.24°. 1) $x^2 = 64$;

2) $x^2 = 0$;

3) $x^2 = -9$;

4) $x^2 = 0,36$;

5) $x^2 - 1 = 0$;

6) $x^2 - \frac{25}{49} = 0$;

7) $x^2 - 6 = 3$;

8) $100 - x^2 = 0$;

9) $144 - x^2 = 0$;

10) $1 + x^2 = 0$;

11) $49 + x^2 = 0$;

12) $8 - x^2 = -8$.

4.25. 1)° $\sqrt{x} = 2$;

2)° $\sqrt{x} = 3$;

3)° $\sqrt{x-2} = 5$;

4)° $\sqrt{x+2} = 4$;

5) $\sqrt{2x+1} = 7$;

6) $\sqrt{3x+4} = 8$.

4.26*. Докажите, что является иррациональным число:

1) $\sqrt{11}$;

2) $\sqrt{13}$;

3) $\sqrt{14}$;

4) $\sqrt{10}$.

4.27. Среди чисел $-\frac{2}{9}$; $\sqrt{2}$; $1,3$; $-\sqrt{2,25}$; $\sqrt{1\frac{24}{25}}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{3}$;

$\sqrt{7}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; π ; $\frac{\sqrt{121}}{7}$; $\sqrt{\frac{28}{7}}$ укажите иррациональные.

4.28°. Укажите, при каких значениях x имеет смысл выражение:

- 1) $\sqrt{4-8x}$; 2) $\sqrt{5-x}$; 3) $\sqrt{3x^4+11}$;
 4) $\sqrt{x^2+2}$; 5) $\sqrt{(3^0-2)x^2}$; 6) $\sqrt{x^4(5-3)}$.

Укажите естественную область определения D выражения (4.29—4.32).

- 4.29.** 1) $\sqrt{10-2x}$; 2) $\sqrt{9-3x}$;
 3) $\sqrt{\frac{1}{2}+4x}$; 4) $\sqrt{3x-\frac{3}{5}}$.
4.30. 1) $\frac{1}{\sqrt{4x-8}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5x+25}}$;
 3) $\frac{4+x}{\sqrt{25-10x}}$; 4) $(4+x)\sqrt{25-10x}$.
4.31. 1) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-1}$;
 3) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{9-3x}$; 4) $\sqrt{2x+12}-\sqrt{14-7x}$.
4.32. 1) $\sqrt{4-x}+\frac{3}{\sqrt{x+3}}+\frac{1}{x}$;
 2) $\frac{6}{\sqrt{x-5}}+\sqrt{12-x}-\frac{4}{x-7}$;
 3)* $\frac{1-x}{\sqrt{2x-4}}+\sqrt{35-5x}-\frac{2x+8}{|x-5|}$;
 4)* $\sqrt{3x+12}-\frac{6x+36}{\sqrt{18-2x}}+\frac{12-6x}{|7-x|}$.

4.2. Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$

Вычислив значения выражения $\sqrt{a^2}$ при $a = 7$ и при $a = -7$, получим:

$$\sqrt{7^2} = 7 \quad \text{и} \quad \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

В каждом из рассмотренных примеров корень из квадрата числа равен модулю этого числа.

Теорема. При любом значении a имеет место равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доказательство. Так как $|a| \geq 0$ и $|a|^2 = a^2$, то согласно определению арифметического квадратного корня число $|a|$ является арифметическим квадратным корнем из a^2 , т. е.

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Тем самым мы доказали, что равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ является тождеством. Действительно, оно превращается в верное числовое равенство при любом значении a . (Заметим, что обе части равенства имеют смысл при любом значении a .) $\square$

Напомним, что равенство двух выражений $A = B$ называется **тождеством**, если оно обращается в верное числовое равенство при любых значениях переменных, при которых оба выражения A и B имеют смысл.

На основании определения модуля числа a можно записать, что

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ если } a \geq 0,$$

и

$$\sqrt{a^2} = -a, \text{ если } a < 0.$$

Пример 1. Найти значение выражения при $y = -11$:

а) $\sqrt{y^2}$; б) $\sqrt{y^4}$.

Решение. а) $\sqrt{y^2} = |y|$; $|y|_{y=-11} = |-11| = 11$;

б) $\sqrt{y^4} = y^2$; $y^2|_{y=-11} = (-11)^2 = 121$.

Ответ: а) 11; б) 121.

Пример 2. Преобразовать выражение $\sqrt{p^2 + 18p + 81}$, если $p \leq -9$.

Решение.

$$\sqrt{p^2 + 18p + 81} = \sqrt{p^2 + 2 \cdot 9 \cdot p + 9^2} = \sqrt{(p + 9)^2} = |p + 9|.$$

Так как по условию $p \leq -9$, то $p + 9 \leq 0$, значит,

$$|p + 9| = -(p + 9) = -p - 9.$$

Ответ: $-p - 9$.

Пример 3. Решить неравенство:

а) $(\sqrt{x})^2 \leq 5$; б) $\sqrt{x^2} < 5$;

в) $(\sqrt{x})^2 > 7$; г) $\sqrt{x^2} \geq 7$.

Решение. а) Неравенство $(\sqrt{x})^2 \leq 5$ равносильно тому, что $x \geq 0$ и $x \leq 5$. А это можно записать в виде двойного неравенства $0 \leq x \leq 5$.

б) Неравенство $\sqrt{x^2} < 5$ равносильно неравенству $|x| < 5$, которое в свою очередь равносильно неравенству $-5 < x < 5$.

в) Неравенство $(\sqrt{x})^2 > 7$ равносильно тому, что $x \geq 0$ и $x > 7$, а это равносильно неравенству $x > 7$.

г) Неравенство $\sqrt{x^2} \geq 7$ равносильно неравенству $|x| \geq 7$, которое в свою очередь равносильно тому, что

$$x \leq -7 \text{ или } x \geq 7.$$

Ответ: а) $[0; 5]$; б) $(-5; 5)$; в) $(7; +\infty)$;

г) $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$.



Запись решения примера 3 можно оформить и таким образом:

$$\text{а) } (\sqrt{x})^2 \leq 5; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 5; \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 5; \quad x \in [0; 5].$$

Ответ: $[0; 5]$.

$$\text{б) } \sqrt{x^2} < 5; \quad |x| < 5; \quad -5 < x < 5; \quad x \in (-5; 5).$$

Ответ: $(-5; 5)$.

$$\text{в) } (\sqrt{x})^2 > 7; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 7; \end{cases} \quad x > 7; \quad x \in (7; +\infty).$$

Ответ: $(7; +\infty)$.

$$\text{г) } \sqrt{x^2} \geq 7; \quad |x| \geq 7; \quad (x \leq -7 \text{ или } x \geq 7); \quad x \in (-\infty; -7] \cup [7; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$.

▲ **Пример 4.** Преобразовать выражение

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Решение. Представим выражение $7 - 4\sqrt{3}$ в виде квадрата разности чисел $\sqrt{3}$ и 2:

$$7 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = (\sqrt{3} - 2)^2.$$

Таким образом, $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$.



Этот пример можно решить быстрее, если заметить, что $2 > \sqrt{3}$, и сразу записать

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Пример 5. Найти значение выражения:

а) $A = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}}$; б) $A = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}}.$

Решение. а) $A = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}} =$

↓ заметив, что $4\sqrt{7} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}$ и $11 = 2^2 + (\sqrt{7})^2$, ↓
↓ преобразуем подкоренное выражение в знаменателе ↓

$$= \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}} =$$

↓ по формуле квадрата суммы имеем ↓

$$= \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{(\sqrt{7} + 2)^2}} = \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{7} + 2} = 1.$$

б) $A = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}} =$
 $= \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{|2 - \sqrt{7}|} = \frac{2 - \sqrt{7}}{-(2 - \sqrt{7})} = -1.$

Ответ: а) $A = 1$; б) $A = -1$.



В случае б) вторую строку решения можно оформить и так (поясните почему):

$$A = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{|\sqrt{7} - 2|} = \frac{2 - \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 2} = -1. \blacktriangle$$



1. Докажите тождество $\sqrt{a^2} = |a|$.
2. Почему равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ является тождеством, а равенство $\sqrt{a^2} = a$ — нет?
3. Назовите несколько значений m , при которых равенство $\sqrt{m^2} = m$ неверно.

Упражнения

Вычислите (4.33—4.35).

- 4.33°. 1) $\sqrt{(0,3)^2}$; 2) $\sqrt{6^2}$; 3) $\sqrt{(-0,5)^2}$;
4) $\sqrt{\left(-2\frac{1}{3}\right)^2}$; 5) $-\sqrt{0,2^2}$; 6) $\sqrt{(-0,2)^2}$;
7) $\sqrt{5^2}$; 8) $\sqrt{(-3)^2}$; 9) $\sqrt{\left(-5\frac{1}{4}\right)^2}$.
- 4.34°. 1) $\sqrt{0,27^2}$; 2) $\sqrt{0,354^2}$; 3) $\sqrt{\left(1\frac{2}{5}\right)^2}$;
4) $\sqrt{\left(5\frac{6}{11}\right)^2}$; 5) $\sqrt{(-0,27)^2}$; 6) $\sqrt{(-1,23)^2}$.
- 4.35°. 1) $\sqrt{3^2} + \sqrt{(-4)^2}$; 2) $\sqrt{17^2} - \sqrt{(-16)^2}$;
3) $\sqrt{\left(5\frac{3}{14}\right)^2} - \sqrt{\left(2\frac{11}{21}\right)^2}$; 4) $\sqrt{\left(-5\frac{3}{14}\right)^2} - \sqrt{\left(-2\frac{11}{21}\right)^2}$.

Определите, верно ли равенство (4.36—4.37).

- 4.36°. 1) $\sqrt{(-1)^2} = -1$; 2) $\sqrt{(-5)^2} = -5$;
3) $\sqrt{(-7)^2} = 7$; 4) $-\sqrt{0,25^2} = -0,25$;
5) $\sqrt{12,25} = 3\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{-11^2} = 11$;
7) $\sqrt{(-4)^2} = -4$; 8) $-\sqrt{(-7)^2} = -7$.
- 4.37°. 1) $\sqrt{a^2} = a$, если $a \geq 0$;
2) $\sqrt{a^6} = a^3$, если $a \geq 0$;
3) $-\sqrt{49a^2} = -7a$, если $a \leq 0$;
4) $\sqrt{\frac{a^2}{9}} = -\frac{a}{3}$, если $a \leq 0$.

Найдите значение выражения (4.38—4.41).

- 4.38°. 1) $\sqrt{(1-2)^2}$; 2) $\sqrt{(2-1)^2}$;
3) $\sqrt{(9-7)^2}$; 4) $\sqrt{(7-9)^2}$.
- 4.39°. 1) $\sqrt{(\sqrt{15}-3)^2}$; 2) $\sqrt{(3-\sqrt{15})^2}$;
3) $\sqrt{(8-\sqrt{17})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{17}-8)^2}$.

4.40°. 1) $\sqrt{75^2 - 2 \cdot 75 \cdot 74 + 74^2}$; 2) $\sqrt{29^2 + 2 \cdot 29 \cdot 71 + 71^2}$;
3) $\sqrt{19^2 + 162 \cdot 19 + 81^2}$; 4) $\sqrt{78^2 - 56 \cdot 78 + 28^2}$.

4.41°. 1) $\sqrt{x^2}$ при $x = 3$; 2) $\sqrt{y^2}$ при $y = 4$;
3) $\sqrt{y^2}$ при $y = -4$; 4) $\sqrt{x^2}$ при $x = -3$;
5) $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}$ при $x = -7$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{y^2}$ при $y = -9$;
7) $\sqrt{(x - y)^2}$ при $x = 2, y = 3$;
8) $\sqrt{(x - y)^2}$ при $x = 4, y = 3$.

Вычислите (4.42—4.44).

4.42. 1) $\sqrt{3^{10}}$; 2) $\sqrt{2^8}$; 3) $\sqrt{5^4}$;
4) $\sqrt{7^6}$; 5) $\sqrt{(-2)^8}$; 6) $\sqrt{(-7)^{10}}$;
7) $\sqrt{(-3)^6}$; 8) $\sqrt{(-5)^4}$; 9) $\sqrt{(-11)^{20}}$.

4.43. 1) $\sqrt{14^6}$; 2) $\sqrt{9^{10}}$; 3) $\sqrt{(-5)^8}$;
4) $\sqrt{(-4)^4}$; 5) $\sqrt{(-5)^6}$; 6) $\sqrt{(-2)^8}$.

4.44. 1) $\sqrt{-(-4)^3}$; 2) $\sqrt{-(-9)^3}$; 3) $\sqrt{(-7)^8}$;
4) $\sqrt{(-7)^4}$; 5) $\sqrt{(-10)^6}$; 6) $\sqrt{(-3)^8}$.

4.45. Упростите выражение:

1) $5a^4b^7\sqrt{a^8} + a^8b^4\sqrt{b^6}$ при $b < 0$;
2) $8mn^2\sqrt{m^8} - m^5n\sqrt{n^2}$ при $n < 0$.

4.46. Верно ли равенство:

1) $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^6} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^3$;
2) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^4} = (2 - \sqrt{5})^2$;
3) $\sqrt{(3 - \sqrt{7})^{10}} = (\sqrt{7} - 3)^5$;
4) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^{22}} = (\sqrt{2} - 1)^{11}$?

4.47. Упростите выражение при $p \geq 0$:

- 1) $\sqrt{p^2}$; 2) $(\sqrt{p})^2$; 3) $\sqrt{p^4}$; 4) $\sqrt{p^6}$;
5) $(\sqrt{p^2})^2$; 6) $(\sqrt{p^4})^2$; 7) $(\sqrt{p^3})^2$; 8) $(\sqrt{p^5})^2$.

4.48. Упростите выражение при $p < 0$:

- 1) $\sqrt{p^8}$; 2) $(\sqrt{p^2})^3$; 3) $\sqrt{p^6}$; 4) $(\sqrt{p^{14}})^2$;
5) $(\sqrt{p^{12}})^2$; 6) $(\sqrt{p^{26}})^2$; 7) $(\sqrt{p^{72}})^4$; 8) $(\sqrt{p^0})^2$.

4.49. Упростите выражение, используя тождество $\sqrt{a^2} = |a|$ и определение модуля числа:

- 1) $\sqrt{x^2}$, если $x \geq 0$; 2) $5\sqrt{m^2}$, если $m < 0$;
3) $\frac{1}{4}\sqrt{y^2}$, если $y < 0$; 4) $\frac{2}{9}\sqrt{p^2}$, если $p > 0$;
5) $-0,2\sqrt{t^4}$, если $t < 0$; 6) $\sqrt{(-k)^2}$, если $k \geq 0$;
7) $\sqrt{(-b)^2}$, если $b < 0$; 8) $-\sqrt{d^{10}}$, если $d \leq 0$;
9) $\sqrt{n^6}$, если $n \leq 0$; 10) $\sqrt{c^8}$, если $c < 0$.

4.50. Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{(a+2)^2}$ при $a < -2$;
2) $\sqrt{(a-3)^2}$ при $a \geq 3$;
3) $\sqrt{a^2 + 14a + 49}$ при $a \leq -7$;
4) $\sqrt{1 + 18a + 81a^2}$ при $a < -\frac{1}{9}$.

4.51. Докажите, что:

- 1) $p + 10 - \sqrt{(p-10)^2} = 2p$, если $p \leq 0$;
2) $p + 17 + \sqrt{(p-17)^2} = 34$, если $p \leq 17$.

Найдите значение выражения (4.52—4.53).

- 4.52. 1) $\sqrt{y^2 - 4y + 4} + \sqrt{(y+9)^2}$ при $y = -5$;
2) $\sqrt{9 + 6x + x^2} + \sqrt{(x-7)^2}$ при $x = 6$.

4.53. 1) $A = \frac{9x^2 - 4}{\sqrt{(3x+2)^2}}$ при x , равном -46 ; 46 ;

2) $A = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{(x-1)^2}}$ при x , равном -129 ; 129 .

4.54. Оцените значения выражения:

1) $A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, если
а) $x < 1$; б) $1 \leq x \leq 2$; в) $x > 2$;

2) $A = \sqrt{x^2 - 8x + 16} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}$, если
а) $x < 4$; б) $4 \leq x \leq 5$; в) $x > 5$.

Упростите выражение (4.55—4.61).

4.55. 1) $(2 + \sqrt{5})^2 + \sqrt{(4\sqrt{5} - 11)^2}$;

2) $(1 + \sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7} - 10)^2}$;

3) $\sqrt{(4\sqrt{3} - 7)^2} - (\sqrt{3} - 2)^2$;

4) $\sqrt{(17 - 10\sqrt{2})^2} - (\sqrt{2} - 5)^2$.

4.56. 1) $\sqrt{(\sqrt{5} - 6)^2} + \sqrt{5}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2} - \sqrt{3}$;

3) $\sqrt{(5 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(\sqrt{7} - 3)^2}$;

4) $\sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{(4 - \sqrt{6})^2}$.

4.57. 1) $4\sqrt{a^2} + \sqrt{(a-1)^2} + 5a$ при $a < 0$;

2) $\sqrt{(2-a)^2} - 2\sqrt{a^2} + a$ при $a > 2$.

4.58. 1) $\sqrt{a^2 + 6 - 3a} + \sqrt{a^2 - 10a + 25}$ при $a > 5$;

2) $\sqrt{a^2 + 5a - 3} + \sqrt{a^2 - 14a + 49}$ при $a < -7$.

4.59. 1) $\frac{3-x}{6} \sqrt{\frac{4}{x^2+9-6x}}$ при $x < 3$;

2) $\frac{m+4}{5} \sqrt{\frac{100}{16+8m+m^2}}$ при $m < -4$;

3) $\frac{2n+7}{4} \sqrt{\frac{64}{4n^2+49+28n}}$ при $n > -3,5$;

4) $\frac{3t-27}{9} \sqrt{\frac{36}{t^2-18t+81}}$ при $t > 9$.

4.60*. 1) $\sqrt{25+2\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

4.61*. 1) $\sqrt{25(4-2\sqrt{3})}$; 2) $\sqrt{16(8+2\sqrt{7})}$;

3) $\sqrt{81(6+2\sqrt{5})}$; 4) $\sqrt{121(7-2\sqrt{6})}$.

4.62. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{-a}$; 3) $\sqrt{a^2}$;

4) $\sqrt{a^3}$; 5) $\sqrt{-a^2}$; 6) $\sqrt{-a^3}$.

4.63. При каких значениях t будет верным равенство:

1) $\sqrt{(t-5)^2} = t-5$; 2) $\sqrt{(t+5)^2} = t+5$;

3) $\sqrt{(t-5)^2} = 5-t$; 4) $\sqrt{(t+5)^2} = -t-5$;

5) $\sqrt{(t-5)^2} = |t-5|$; 6) $\sqrt{(t+5)^2} = |t+5|$?

4.64. При каких значениях a будет верным равенство:

1) $\sqrt{a^4} = -a^2$; 2) $\sqrt{(a-3)^2} = 3-a$?

4.65. Верно ли, что при любых значениях k значение выражения $\sqrt{(5-k)^2} + \sqrt{(k-6)^2}$ равно -1 ?

4.66. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2} = -2$; 2) $\sqrt{(x+3)^2} = -7$;

3) $\sqrt{(x-5)^2} = 2$; 4) $\sqrt{(x+6)^2} = 9$.

Решите неравенство (4.67—4.69).

4.67. 1) $\sqrt{x^2} > 3$; 2) $\sqrt{x^2} < 6$;

3) $\sqrt{(x-1)^2} \leq 4$; 4) $\sqrt{(x+2)^2} \geq 7$.

$$4.68*. \quad 1) (\sqrt{x})^2 < 6; \quad 2) (\sqrt{x})^2 > 8;$$

$$3) (\sqrt{x+2})^2 \geq 1; \quad 4) (\sqrt{x-3})^2 \leq 12.$$

$$4.69*. \quad 1) (\sqrt{-x})^2 \geq 3; \quad 2) (\sqrt{-x})^2 > 4;$$

$$3) (\sqrt{1-x})^2 > 5; \quad 4) (\sqrt{6-x})^2 \geq 15.$$

4.70. Решите уравнение:

$$1) \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(6-x)^2} = 5 \text{ при } x < 2;$$

$$2) \sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(x-7)^2} = 4 \text{ при } 1 \leq x \leq 7.$$

4.3. Квадратный корень из произведения

Простые вычисления показывают, что верно равенство

$$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}.$$

Аналогичное равенство будет верным, если вместо чисел 16 и 9 поставить любые неотрицательные числа.

Теорема 1. При любых значениях $a \geq 0$ и $b \geq 0$ верно равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Доказательство. Поскольку в теореме речь идет о значениях a и b , то все рассматриваемые далее равенства числовые. А так как $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то каждое из выражений $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ имеет смысл.

Числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — неотрицательные, значит, неотрицательно и их произведение $\sqrt{a} \sqrt{b}$. Возведем его в квадрат, используя свойства степеней и определение квадратного корня:

$$(\sqrt{a} \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Таким образом, $\sqrt{a} \sqrt{b}$ — неотрицательное число, квадрат которого равен ab . Но согласно определению арифметического квадратного корня из числа это означает, что

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}.$$

Тем самым мы доказали, что равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ является тождеством. Действительно, оно обращается в верное числовое равенство, при любых значениях a и b , для которых выражения $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ имеют смысл. $\boxtimes$

Доказанную теорему можно сформулировать так:



квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел.

Поменяв в доказанном тождестве местами левую и правую части, получим $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, т. е.



произведение двух квадратных корней из неотрицательных чисел равно квадратному корню из их произведения.

Такое же тождество верно в случае, когда число множителей под знаком корня больше двух, и доказывается оно аналогично. Следовательно:



квадратный корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел.

Обратим внимание на то, что речь идет об арифметических квадратных корнях.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{242} \cdot \sqrt{96} \cdot \sqrt{48}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } & \sqrt{242} \cdot \sqrt{96} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{242 \cdot 96 \cdot 48} = \\ & = \sqrt{121 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 3} = \sqrt{11^2 \cdot 2^2 \cdot 16^2 \cdot 3^2} = 11 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 3 = 1056. \end{aligned}$$

Ответ: 1056.

Пример 2. Вычислить:

а) $\sqrt{75 \cdot 27}$; б) $\sqrt{1296}$.

Решение: а) $\sqrt{75 \cdot 27} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt{5^2 \cdot 9^2} = 5 \cdot 9 = 45$.

б) Способ 1. $\sqrt{1296} = \sqrt{4 \cdot 324} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 81} = \sqrt{4^2 \cdot 9^2} =$
 $= 4 \cdot 9 = 36$.



Способ 2.

$$\sqrt{1296} =$$

↓ разложив число 1296 на простые множители, ↓
получим

$$= \sqrt{2^4 \cdot 3^4} =$$

↓ по теореме о корне из произведения получим ↓

$$= 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36.$$

Ответ: а) 45; б) 36.

Пример 3. Извлечь арифметический квадратный корень из выражения $18x^2y^8$ при $x < 0$, $y < 0$.

Решение. $\sqrt{18x^2y^8} = \sqrt{9 \cdot 2x^2(y^4)^2} = 3\sqrt{2|x| \cdot |y^4|} =$

↓ по определению модуля при $x < 0$ имеем $|x| = -x$, ↓
кроме того, $|y^4| = y^4$ при любом y

$$= 3\sqrt{2(-x)y^4} = -3\sqrt{2xy^4}.$$

Ответ: $-3\sqrt{2xy^4}$.

Пример 4. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{5}{\sqrt{7}}$; б)* $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$; в)* $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad (a \neq b).$

Решение. а) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7};$

▲ б) $\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 2(\sqrt{3}+1);$

в) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{ab}-b}{a-b}. \quad \blacktriangle$

Обратите внимание, что после преобразований в каждом из примеров а)—в) получилась дробь, которая уже не содержит в знаменателе корней.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x}\sqrt{x^3} = 14.$$

Решение. Уравнение $\sqrt{x}\sqrt{x^3} = 14$ равносильно тому, что $x \geq 0$ и $x^2 = 14$.

Корнем исходного уравнения является число $\sqrt{14}$ (поясните почему).

Ответ: $\sqrt{14}$.



▲ Решение примера 5 можно записать и так:

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\sqrt{x^3} &= 14; & \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 14; \end{cases} & \begin{cases} x \geq 0, \\ (x = -\sqrt{14} \text{ или } x = \sqrt{14}); \end{cases} \\ x &= \sqrt{14}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{14}$. ▲

Определение. Пусть a и b — неотрицательные числа. Средним геометрическим чисел a и b называется арифметический квадратный корень из их произведения. То есть среднее геометрическое чисел a и b — это число $\sqrt{ab}$.

Пример 6. Найти среднее геометрическое чисел 12 и 75.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \sqrt{12 \cdot 75} &= \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

Ответ: 30.



В Древней Греции произведение чисел ab связывали прежде всего с площадью прямоугольника со сторонами a и b . Соответственно сторону квадрата, площадь которого равна ab , находили, вычисляя $\sqrt{ab}$. Связь с геометрическими фигурами и объясняет название — среднее геометрическое.



1. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из произведения двух неотрицательных чисел.

2. Как освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{m}{\sqrt{p}}$;

б)* $\frac{m}{\sqrt{p+k}}$;

в)* $\frac{m}{\sqrt{p-k}}$;

г)* $\frac{m}{\sqrt{p-t}}$;

д)* $\frac{m}{\sqrt{p+t}}$?

3. Что называется средним геометрическим чисел a и b ?

Упражнения

Вычислите (4.71—4.74).

- 4.71°. 1) $\sqrt{25 \cdot 16}$; 2) $\sqrt{49 \cdot 4}$;
3) $\sqrt{144 \cdot 4}$; 4) $\sqrt{100 \cdot 16}$;
5) $\sqrt{1600 \cdot 81}$; 6) $\sqrt{225 \cdot 9}$;
7) $\sqrt{400 \cdot 25 \cdot 169}$; 8) $\sqrt{49 \cdot 10\,000 \cdot 121}$;
9) $\sqrt{36 \cdot 625 \cdot 64 \cdot 900}$; 10) $\sqrt{2500 \cdot 256 \cdot 4 \cdot 16}$.
- 4.72°. 1) $\sqrt{16 \cdot 49 \cdot 0,25}$; 2) $\sqrt{100 \cdot 0,36 \cdot 0,64}$;
3) $\sqrt{81 \cdot 0,04 \cdot 121}$; 4) $\sqrt{0,09 \cdot 0,49 \cdot 10\,000}$;
5) $\sqrt{0,16 \cdot 0,25 \cdot 1,44}$; 6) $\sqrt{64 \cdot 2,25 \cdot 0,04}$;
7) $\sqrt{169 \cdot 0,25 \cdot 0,49}$; 8) $\sqrt{1225 \cdot 0,0016 \cdot 0,01}$;
9) $\sqrt{1,44 \cdot 0,04 \cdot 0,0001}$; 10) $\sqrt{0,0004 \cdot 6,25 \cdot 1,69}$.
- 4.73°. 1) $\sqrt{-36 \cdot (-0,01)}$; 2) $\sqrt{-0,81 \cdot (-0,04)}$;
3) $\sqrt{-25 \cdot (-0,0001)}$; 4) $\sqrt{-1,69 \cdot (-49)}$.
- 4.74. 1) $\sqrt{-9 \cdot 6,76 \cdot (-100)}$; 2) $\sqrt{-16 \cdot (-49) \cdot 0,64}$;
3) $\sqrt{4 \cdot (-0,25) \cdot (-144)}$; 4) $\sqrt{0,01 \cdot (-0,25) \cdot (-1,21)}$;
5) $\sqrt{-49 \cdot (-9) \cdot (-400) \cdot (-1,69)}$;
6) $\sqrt{-100 \cdot 6,25 \cdot (-2,25) \cdot 3,61}$.

4.75. Найдите среднее геометрическое чисел:

- 1) 2 и 32; 2) 3 и 27; 3) 72 и 18;
4) 50 и 288; 5) 3,6 и 2,5; 6) 4,9 и 6,4.

Вычислите (4.76—4. 81).

- 4.76. 1) $\sqrt{27 \cdot (-24) \cdot (-8)}$; 2) $\sqrt{75 \cdot (-6) \cdot (-18)}$;
3) $\sqrt{21 \cdot 6 \cdot (-7) \cdot (-8)}$; 4) $\sqrt{-45 \cdot 10 \cdot (-18)}$;
5) $\sqrt{3,5 \cdot (-2,1) \cdot (-0,15)}$; 6) $\sqrt{-3,2 \cdot 4,5 \cdot (-62,5)}$;
7) $\sqrt{77 \cdot (-24) \cdot (-33) \cdot 14}$; 8) $\sqrt{-5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (-20) \cdot 27}$;
9) $\sqrt{10 \cdot (-20) \cdot (-48) \cdot (-36) \cdot (-75) \cdot 98}$;
10) $\sqrt{21 \cdot 65 \cdot (-39) \cdot (-35) \cdot (-17) \cdot (-68)}$.

- 4.77. 1) $\sqrt{1,69 \cdot 17 + 8 \cdot 1,69}$; 2) $\sqrt{0,3 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8}$;
3) $\sqrt{2,25 \cdot 18 - 2,25 \cdot 2}$; 4) $\sqrt{0,64 \cdot 0,85 - 0,64 \cdot 0,81}$;
5) $\sqrt{1,09 \cdot 25 + 25 \cdot 0,6}$; 6) $\sqrt{0,8 \cdot 2,4 - 0,8 \cdot 0,6}$.
- 4.78°. 1) $\sqrt{3} \sqrt{27}$; 2) $\sqrt{28} \sqrt{7}$;
3) $\sqrt{2} \sqrt{32}$; 4) $\sqrt{63} \sqrt{7}$;
5) $\sqrt{13} \sqrt{52}$; 6) $\sqrt{45} \sqrt{5}$;
7) $\sqrt{0,3} \sqrt{4,8}$; 8) $\sqrt{2,8} \sqrt{6,3}$;
9) $\sqrt{11} \sqrt{44}$; 10) $\sqrt{20} \sqrt{80}$;
11) $\sqrt{14} \sqrt{98} \sqrt{63}$; 12) $\sqrt{5} \sqrt{35} \sqrt{28}$.
- 4.79. 1) $\sqrt{202\,500}$; 2) $\sqrt{152\,100}$;
3) $\sqrt{2\,890\,000}$; 4) $\sqrt{3\,610\,000}$;
5) $\sqrt{0,0529}$; 6) $\sqrt{0,1156}$;
7) $\sqrt{24,01}$; 8) $\sqrt{2704}$;
9) $\sqrt{0,3481}$; 10) $\sqrt{0,2116}$.
- 4.80. 1) $\sqrt{22\,500}$; 2) $\sqrt{6\,250\,000}$;
3) $\sqrt{0,001225}$; 4) $\sqrt{0,002025}$;
5) $\sqrt{30\,250\,000}$; 6) $\sqrt{4\,225\,000\,000}$;
7) $\sqrt{56,25}$; 8) $\sqrt{72,25}$.
- 4.81. 1) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5^6}$; 2) $\sqrt{(-3)^6 \cdot 0,1^4}$;
3) $\sqrt{10^2 \cdot (-6)^{10}}$; 4) $\sqrt{(-12)^4 \cdot 3^6}$;
5) $\sqrt{(-10)^4 \cdot (-12)^2 \cdot (-3)^4 \cdot 4^4}$;
6) $\sqrt{(-5)^8 \cdot (-2)^6 \cdot (-3)^4 \cdot (-5)^{-6}}$;
7) $\sqrt{(-5)^4 \cdot (-2)^3 \cdot (-98)}$;
8) $\sqrt{3^4 \cdot (-2)^7 \cdot (-50)}$.

4.82. Найдите значение выражения:

- 1) $\sqrt{25a^6b^2}$ при $a = -1$, $b = 2$;
- 2) $\sqrt{36m^{10}n^8}$ при $m = -2$, $n = 1$;
- 3) $\sqrt{49a^2b^4}$ при $a = -5$, $b = -2$;
- 4) $\sqrt{64p^{12}k^{14}}$ при $p = 0,5$, $k = -1$.

4.83. Пусть $m \geq 0$ и $n \geq 0$. Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{2m \ 3n \ 8n \ 12m}$;
- 2) $\sqrt{12m \ 15n \ 35m \ 28n}$;
- 3) $\sqrt{30m^7 \ 45n^3 \ 75n^5 \ 98m^3}$;
- 4) $\sqrt{12m^{17} \ 21n^3 \ 24n^5 \ 42m^3}$.

4.84. Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{25a^2b^4}$, если $a \geq 0$, $b < 0$;
- 2) $\sqrt{49b^6y^{24}}$, если $b > 0$, $y \geq 0$;
- 3) $\sqrt{400t^2}$, если $t \geq 0$;
- 4) $\sqrt{10\,000m^4}$, если $m < 0$;
- 5) $\sqrt{9x^2y^{10}}$, если $x < 0$, $y \geq 0$;
- 6) $\sqrt{81x^4y^{20}}$, если $x < 0$, $y \leq 0$;
- 7) $\sqrt{16(m-n)^4}$, если $m < n$;
- 8) $\sqrt{0,09(m-n)^2}$, если $m \geq n$.

4.85. Найдите значение выражения:

- 1) $\sqrt{-t} \sqrt{-9t^3}$ при $t = -7$;
- 2) $\frac{3}{7} \sqrt{(-k)^6} \frac{4}{21} \sqrt{(-k)^4}$ при $k = 7$;
- 3) $\sqrt{a^2b^3} \sqrt{bc^4}$ при $a = -5$, $b = 2$, $c = -3$;
- 4) $\sqrt{x^3y^5} \sqrt{xy}$ при $x = 3$, $y = 2$;
- 5) $\sqrt{(a+b)^7} \sqrt{(a+b)^{-3}}$ при $a = -25$, $b = 29$;
- 6) $\sqrt{(m-n)^{15}} \sqrt{(m-n)^{-5}}$ при $m = -35$, $n = -37$.

4.86. Выполните действия:

- 1) $5\sqrt{n}2\sqrt{n}$; 2) $9\sqrt{-t}\frac{1}{3}\sqrt{-t^3}$;
3) $\frac{1}{4}\sqrt{64m^3}0,2\sqrt{m}$; 4) $-0,05\sqrt{k}6\frac{2}{3}\sqrt{k^5}$;
5) $\sqrt{-m}\sqrt{-n}\sqrt{-k}$; 6) $\sqrt{-np^2}\sqrt{-n^3p}$;
7) $\sqrt{-mn}\sqrt{-np}\sqrt{mpt}$, если $m \leq 0$;
8) $\sqrt{-m^5p}\sqrt{-m^7k}\sqrt{-ktp}$, если $m \geq 0$.

4.87. Представьте выражение в виде произведения квадратных корней:

- 1) $\sqrt{42}$; 2) $\sqrt{105}$; 3) $\sqrt{13x}$; 4) $\sqrt{7x}$;
5) $\sqrt{xy}$, если $x < 0$, $y < 0$;
6) $\sqrt{15ab}$, если $a < 0$, $b < 0$;
7)* $\sqrt{mk+mp}$, если $m < 0$, $k < 0$, $p < 0$;
8)* $\sqrt{ab+ac}$, если $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$.

4.88. Вычислите:

- 1) $\sqrt{155^2 - 124^2}$; 2) $\sqrt{82^2 - 18^2}$;
3) $\sqrt{65^2 - 63^2}$; 4) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

4.89. Найдите значение выражения $\sqrt{a^2 - b^2}$ при:

- 1) $a = 104$, $b = 40$; 2) $a = 85$, $b = 13$;
3) $a = 65$, $b = 25$; 4) $a = 113$, $b = 112$;
5) $a = 37$, $b = 12$; 6) $a = 2,6$, $b = 1$;
7) $a = 1,17$, $b = 1,08$; 8) $a = 0,74$, $b = 0,24$.

4.90*. Вычислите:

- 1) $\sqrt{(5 - \sqrt{3})(5 + \sqrt{3})}\sqrt{88}$;
2) $\sqrt{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)}\sqrt{243}$;
3) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 2(2 + \sqrt{3})}$;
4) $\sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2 2(3 - \sqrt{5})}$;
5) $\sqrt{(\sqrt{17} - \sqrt{2 + \sqrt{5}})(\sqrt{17} + \sqrt{2 + \sqrt{5}})(15 + \sqrt{5})\sqrt{55}}$;
6) $(\sqrt{26} + \sqrt{20 + \sqrt{11}})(\sqrt{26} - \sqrt{20 + \sqrt{11}})(6 + \sqrt{11})$;

$$7) \sqrt{148} \sqrt{7 - 2\sqrt{3}} \sqrt{7 + 2\sqrt{3}};$$

$$8) \sqrt{2 + \sqrt{3}} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби (4.91—4.96).

4.91°. 1) $\frac{3}{\sqrt{6}};$

2) $\frac{2}{\sqrt{2}};$

3) $\frac{-9}{\sqrt{3}};$

4) $\frac{-7}{\sqrt{7}};$

5) $\frac{5}{\sqrt{5}};$

6) $\frac{3}{\sqrt{15}};$

7) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}};$

8) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{6}};$

9) $\frac{9}{\sqrt{27}};$

10) $\frac{6}{\sqrt{12}};$

11) $\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}};$

12) $\frac{12\sqrt{8}}{\sqrt{24}}.$

4.92. 1) $\frac{m}{\sqrt{m}};$

2) $\frac{t^2}{\sqrt{t}};$

3) $\frac{k}{\sqrt{k^3}};$

4) $\frac{p}{\sqrt{p^5}};$

5) $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}};$

6) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}.$

4.93*. 1) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}};$

2) $\frac{3}{\sqrt{3}-2};$

3) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-5};$

4) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+5};$

5) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}};$

6) $\frac{\sqrt{5}+1}{3\sqrt{5}-4};$

7) $\frac{4-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}};$

8) $\frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}};$

9) $\frac{11\sqrt{3}+6\sqrt{11}}{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}.$

4.94*. 1) $\frac{m}{\sqrt{m}-\sqrt{n}};$

2) $\frac{3c}{\sqrt{c}-\sqrt{p}};$

3) $\frac{p-k}{\sqrt{p}+\sqrt{k}};$

4) $\frac{t-a}{\sqrt{t}+\sqrt{a}}.$

4.95*. 1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$

2) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$

3) $\frac{a}{1-\sqrt{a}};$

4) $\frac{a}{\sqrt{a}+1};$

5) $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};$

6) $\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}};$

7) $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}};$

8) $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}};$

9) $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}};$

10) $\frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}}.$

4.96*. 1) $\frac{12}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{3}};$

2) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}};$

3) $\frac{2 + \sqrt{30}}{\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}};$

4) $\frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}};$

5) $\frac{1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}};$

6) $\frac{60\sqrt{2} + 12\sqrt{3}}{5\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}};$

7) $\frac{3}{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}};$

8) $\frac{4}{\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}.$

Решите уравнение (4.97—4.98).

4.97. 1) $\sqrt{x}\sqrt{x} = 7,2;$

2) $\sqrt{x^3}\sqrt{x} = 9;$

3) $\sqrt{-x^3}\sqrt{-x} = 5;$

4) $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = 7;$

5) $\sqrt{x^2}\sqrt{9x^2} = 81;$

6) $\sqrt{25x^4}\sqrt{625x^2} = 27.$

4.98. 1) $\sqrt{x^4}\sqrt{x^6} - 32 = 0;$

2) $\sqrt{-x^6}\sqrt{-x^2} - 625 = 0;$

3) $\sqrt{(x-2)^2}\sqrt{(x-2)^2} = 16;$

4) $\sqrt{x-3}\sqrt{x-3} = 5;$

5) $\frac{1}{5\sqrt{x^3}\sqrt{x}} = 2;$

6) $\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{-x^3}} = 3.$

4.99. Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна площади прямоугольника со сторонами:

1) 63 дм и 7 дм;

2) 3 см и 48 см;

3) 11 м и 99 м;

4) 6 см и 216 см.

4.100. Сравните среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:

1) 45 и 20;

2) 40 и 10;

3) 242 и 50;

4) 200 и 32;

5) 75 и 300;

6) 125 и 500.

4.4. Квадратный корень из частного

Простые вычисления показывают, что верно равенство

$$\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}.$$

Аналогичное равенство будет верным, если вместо чисел 16 и 9 поставить любые числа, при которых выражения имеют смысл.

Теорема. При любых значениях $a \geq 0$ и $b > 0$ верно равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доказательство. Поскольку в теореме речь идет о значениях a и b , то все рассматриваемые далее равенства числовые. А так как $a \geq 0$ и $b > 0$, то каждое из выражений $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеет смысл.

Число $\sqrt{a}$ — неотрицательное, а число $\sqrt{b}$ — положительное, значит, неотрицательно и их частное $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Возведем частное в квадрат, используя свойства степеней и определение арифметического квадратного корня:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Таким образом, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — это неотрицательное число, квадрат которого равен $\frac{a}{b}$. Согласно определению арифметического квадратного корня это означает: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Тем самым мы доказали, что равенство $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ является тождеством, так как оно обращается в верное числовое равенство при любых значениях a и b , при которых выражения $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ имеют смысл. $\square$

Доказанную теорему для арифметических квадратных корней можно сформулировать так:



квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя.

Поменяв в доказанном тождестве местами левую и правую части, получим $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, т. е.



частное квадратного корня из неотрицательного числа и квадратного корня из положительного числа равно квадратному корню из частного соответствующих подкоренных выражений.

Пример 1. Вычислить: а) $\sqrt{\frac{625}{36 \cdot 81}}$; б) $\frac{\sqrt{320}}{\sqrt{80}}$.

Решение. а) $\sqrt{\frac{625}{36 \cdot 81}} = \frac{\sqrt{25^2}}{\sqrt{6^2 \cdot 9^2}} = \frac{25}{6 \cdot 9} = \frac{25}{54}$;

б) $\frac{\sqrt{320}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{320}{80}} = \sqrt{4} = 2$.

Ответ: а) $\frac{25}{54}$; б) 2.

Пример 2. При каких значениях y данный квадратный корень из дроби можно представить в виде частного квадратных корней из числителя и знаменателя исходного подкоренного выражения:

а) $\sqrt{\frac{-y}{53}}$; б) $\sqrt{\frac{3-y}{y}}$; в) $\sqrt{\frac{y+2}{y-3}}$?

Решение. а) $\sqrt{\frac{-y}{53}} = \frac{\sqrt{-y}}{\sqrt{53}}$ при $-y \geq 0$, т. е. при $y \leq 0$.

б) Корень можно представить в виде частного квадратных корней, если значения числителя и знаменателя подкоренной дроби будут соответственно неотрицательным и положительным, т. е.

$$\begin{cases} 3 - y \geq 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Откуда имеем: $y \leq 3$ и $y > 0$. Таким образом, $\sqrt{\frac{3-y}{y}} = \frac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{y}}$ при $0 < y \leq 3$, т. е. $y \in (0; 3]$.

$$в) \sqrt{\frac{y+2}{y-3}} = \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{y-3}} \text{ при } \begin{cases} y+2 \geq 0, \\ y-3 > 0. \end{cases} \text{ Откуда } \begin{cases} y \geq -2, \\ y > 3, \end{cases} \text{ т. е. } y > 3.$$

Ответ: а) при $y \in (-\infty; 0]$; б) при $y \in (0; 3]$;

в) при $y \in (3; +\infty)$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} = 9$.

Решение. Данное уравнение равносильно тому, что

$$x > 0 \text{ и } \sqrt{\frac{x^5}{x}} = 9, \text{ т. е. } x > 0 \text{ и } x^2 = 9.$$

Корнем исходного уравнения является число 3 (поясните почему).

Ответ: 3.



Решение примера 3 можно записать и так:

$$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} = 9; \quad \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{\frac{x^5}{x}} = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ (x = 3 \text{ или } x = -3); \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 4. Решить неравенство:

$$а) \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} < 2; \quad б) \frac{\sqrt{8(1-x)}(x-7)}{\sqrt{2(1-x)}} \geq 0.$$

Решение. а) Неравенство $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} < 2$ равносильно тому, что $x > 0$ и $\sqrt{\frac{x^3}{x}} < 2$, т. е. $x > 0$ и $|x| < 2$, что равносильно двойному неравенству $0 < x < 2$ (поясните почему).

б) Неравенство $\frac{\sqrt{8(1-x)}(x-7)}{\sqrt{2(1-x)}} \geq 0$ равносильно тому, что

$1-x > 0$ и $\sqrt{\frac{8(1-x)}{2(1-x)}}(x-7) \geq 0$, т. е. $x < 1$ и $2(x-7) \geq 0$. А это равносильно тому, что $x < 1$ и $x \geq 7$. Очевидно, что таких значений x нет.

Ответ: а) $(0; 2)$; б) нет решений.



Решение примера 4 можно оформить и так:

$$\text{а) } \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} < 2; \quad \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{\frac{x^3}{x}} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x^2} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ |x| < 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ -2 < x < 2; \end{cases} \quad 0 < x < 2.$$

Ответ: (0; 2).

$$\text{б) } \frac{\sqrt{8(1-x)(x-7)}}{\sqrt{2(1-x)}} \geq 0; \quad \begin{cases} 1-x > 0, \\ 2(x-7) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x \geq 7. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.



1. Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из дроби (частного).

2. Верно ли для любого значения m и $p \neq 0$ равенство:

$$\text{а) } \sqrt{\frac{m}{p}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{p}}; \quad \text{б) } \sqrt{\left| \frac{m}{p} \right|} = \frac{\sqrt{|m|}}{\sqrt{|p|}}?$$

Упражнения

Вычислите (4.101—4.105).

$$\text{4.101}^\circ. \quad 1) \sqrt{\frac{0,25}{169}}; \quad 2) \sqrt{\frac{100}{0,49}}; \quad 3) \sqrt{1\frac{9}{16}}; \quad 4) \sqrt{1\frac{13}{36}};$$

$$5) \sqrt{6\frac{1}{4}}; \quad 6) \sqrt{5\frac{4}{9}}; \quad 7) \sqrt{3\frac{13}{36}}; \quad 8) \sqrt{2\frac{23}{49}}.$$

$$\text{4.102}^\circ. \quad 1) \sqrt{2\frac{1}{7}} \sqrt{2\frac{1}{3}} \sqrt{5}; \quad 2) \sqrt{\frac{1}{7}} \sqrt{\frac{7}{11}} \sqrt{\frac{11}{16}};$$

$$3) \sqrt{3,4} \sqrt{3\frac{2}{17}} \cdot 2\frac{19}{53}; \quad 4) \sqrt{\frac{2}{5}} \sqrt{2\frac{1}{5}}.$$

$$\text{4.103}^\circ. \quad 1) \sqrt{\frac{-25 \cdot 16}{-9}}; \quad 2) \sqrt{\frac{-121 \cdot (-4)}{81}}; \quad 3) \sqrt{\frac{-98}{-32}};$$

$$4) \sqrt{\frac{75}{192}}; \quad 5) \sqrt{\frac{162}{14 \cdot 175}}; \quad 6) \sqrt{\frac{392 \cdot 45}{160}}.$$

$$\text{4.104}^\circ. \quad 1) \sqrt{27} : \sqrt{3}; \quad 2) \sqrt{160} : \sqrt{40};$$

$$3) \sqrt{186} : \sqrt{837} \sqrt{8}; \quad 4) \sqrt{24} : \sqrt{36} : \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$5) \sqrt{3\frac{5}{11}} : \sqrt{3\frac{2}{3}} \sqrt{12\frac{2}{3}}; \quad 6) \sqrt{2\frac{5}{8}} : \sqrt{4\frac{1}{5}} : \sqrt{62,5}.$$

$$4.105^\circ. \quad 1) \sqrt{\frac{49 \cdot 81}{25 \cdot 64}}; \quad 2) \sqrt{\frac{100 \cdot 49}{121 \cdot 169}};$$

$$3) \sqrt{\frac{1,69 \cdot 16}{1,21 \cdot 49}}; \quad 4) \sqrt{\frac{3,61 \cdot 25}{6,76 \cdot 9}}.$$

Выполните действия (4.106—4.107).

$$4.106. \quad 1) (12\sqrt{2} - 6\sqrt{10} + 15\sqrt{8}) : \left(3\sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

$$2) (2\sqrt{18} - 4\sqrt{12} + 6\sqrt{6}) : \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

$$3) (9\sqrt{80} + 6\sqrt{45} - 3\sqrt{20}) : (3\sqrt{5});$$

$$4) \left(12\sqrt{6} + 8\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{12}\right) : \left(4\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$4.107. \quad 1) (3\sqrt{6} + 2\sqrt{12} - 0,25\sqrt{24}) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right);$$

$$2) (5\sqrt{2} - 0,5\sqrt{8} + 1,2\sqrt{32}) : \left(0,25\sqrt{\frac{1}{2}}\right);$$

$$3) \left(8\sqrt{10} - 6\sqrt{2\frac{1}{2}} + 2\sqrt{40}\right) : \left(2\sqrt{\frac{2}{5}}\right);$$

$$4) \left(2\sqrt{15} - 6\sqrt{0,6} + 3\sqrt{1\frac{2}{3}}\right) : \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Вычислите (4.108—4.109).

$$4.108. \quad 1) \sqrt{\frac{(-6)^{10} \cdot 2^5 \cdot (-5)^4}{(-6)^4 \cdot 2^3}}; \quad 2) \sqrt{\frac{7^4 \cdot 9^6 \cdot (-36)}{-7^8 \cdot (-9)^4}};$$

$$3) \sqrt{\frac{(-8)^4 \cdot (-5)^3}{-5 \cdot 4^3}}; \quad 4) \sqrt{\frac{(-3)^6}{(-9)^4 \cdot 5^4}}.$$

$$4.109. \quad 1) \frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}}; \quad 2) \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{27}}; \quad 3) \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{3}};$$

$$4) \frac{\sqrt{567}}{\sqrt{7}}; \quad 5) \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{75}}; \quad 6) \frac{\sqrt{845}}{\sqrt{5}}.$$

4.110. Во сколько раз число p больше числа c , если:

$$1) p = \sqrt{45}, c = \sqrt{5}; \quad 2) p = \sqrt{75}, c = \sqrt{3};$$

$$3) p = \sqrt{726}, c = \sqrt{6}; \quad 4) p = \sqrt{567}, c = \sqrt{7}?$$

4.111. Вычислите:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{\sqrt{65^2 - 25^2}}{\sqrt{121}}; & 2) \frac{\sqrt{29^2 - 20^2}}{\sqrt{144}}; \\ 3) \frac{\sqrt{22,5^2 - 13,5^2}}{\sqrt{25}}; & 4) \frac{\sqrt{26,5^2 - 22,5^2}}{\sqrt{0,81}}; \\ 5) \frac{\sqrt{29,5^2 - 19,5^2}}{\sqrt{490}}; & 6) \frac{\sqrt{0,95^2 - 0,65^2}}{\sqrt{0,03}}. \end{array}$$

4.112. 1) Площадь первого квадрата 98 см^2 , а второго — 2 см^2 . Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго?

2) Площадь первого квадрата 50 см^2 , а второго — в 4 раза больше. Во сколько раз сторона первого квадрата меньше стороны второго?

3) Отношение площадей двух кругов равно $\frac{1}{9}$, а радиус большего круга равен 15 см . Найдите радиус меньшего круга.

4) Отношение площадей двух кругов равно $0,01$, а радиус меньшего круга равен 5 м . Найдите радиус большего круга.

4.113. Пусть $a < 0$, $b < 0$. Упростите выражение:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{\frac{16a^2}{169b^6}}; & 2) \sqrt{\frac{121a^8}{49b^{18}}}; & 3) \sqrt{\frac{144a^{10}}{100b^{26}}}; \\ 4) \sqrt{\frac{576a^{12}}{225b^{26}}}; & 5) \sqrt{\frac{5476a^{30}}{7744b^{12}}}; & 6) \sqrt{\frac{6724a^{14}}{7056b^{18}}}. \end{array}$$

Упростите выражение (4.114—4.115).

$$\begin{array}{ll} 4.114. \quad 1) \sqrt{\frac{16}{9b^2}}, \text{ где } b > 0; & 2) \sqrt{\frac{49}{25b^2}}, \text{ где } b > 0; \\ 3) \sqrt{\frac{121b^2}{t^4}}, \text{ где } b \leq 0; & 4) \sqrt{\frac{900b^6}{a^4}}, \text{ где } b \leq 0; \\ 5) \sqrt{\frac{121}{64m^{10}n^8}}, \text{ где } m < 0; & \\ 6) \sqrt{\frac{169}{144a^6b^{10}}}, \text{ где } a < 0, b > 0. & \end{array}$$

- 4.115. 1) $\sqrt{\frac{49k^6}{81}}$;
 2) $\sqrt{10\,000m^2}$;
 3) $\sqrt{5625m^{10}n^{18}}$, где $m < 0$, $n > 0$;
 4) $\sqrt{\frac{169m^4}{n^4k^{20}}}$.

4.116. Найдите значение выражения:

- 1) $\sqrt{\frac{49a^7b^5}{36a^3b^3}}$ при $a = -6$, $b = -2$;
 2) $\sqrt{\frac{25x^{11}y^8}{9x^3y^2}}$ при $x = -2$, $y = -3$;
 3) $\sqrt{\frac{(5m-4n)^4}{(4n-5m)^2}}$ при $n = -4$, $m = 4$;
 4) $\sqrt{\frac{(2c-4p)^6}{(4p-2c)^4}}$ при $p = -15$, $c = 2$.

4.117. Пусть $a > 0$, $b > 0$, m , n — целые числа. Упростите выражение:

- 1) $\sqrt{\frac{a^{2m}}{b^{4n}}}$; 2) $\sqrt{\frac{a^{6m}}{b^{10n}}}$;
 3) $\sqrt{\frac{a^{6m+2}}{b^{4n+4}}}$; 4) $\sqrt{\frac{a^{4m-2}}{b^{6n-4}}}$.

4.118. Представьте выражение в виде частного квадратных корней из числителя и знаменателя подкоренного выражения:

- 1) $\sqrt{\frac{5a}{3b}}$, если $a \geq 0$, $b > 0$;
 2) $\sqrt{\frac{7a}{4b}}$, если $a \geq 0$, $b > 0$;
 3) $\sqrt{-\frac{9m}{4n}}$, если $m \leq 0$, $n > 0$;
 4) $\sqrt{-\frac{5p}{9t}}$, если $p \geq 0$, $t < 0$.

4.119. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-p}} \sqrt{-p^3}; & 2) \frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-m^3}} \sqrt{-n}; \\
 3) \frac{\sqrt{-m^7 n}}{\sqrt{-mn^4}}; & 4) \frac{\sqrt{-m^6 n^3}}{\sqrt{-m^3 n}}; \\
 5) \frac{\sqrt{-m^7 n^9}}{\sqrt{-mn^2}} \sqrt{-m^9}; & 6) \frac{\sqrt{-m^5 n^3}}{\sqrt{-m^4 n}} \sqrt{-mn}.
 \end{array}$$

4.120°. Укажите, при каких значениях переменных выражение можно представить в виде частного квадратных корней из числителя и знаменателя:

$$\begin{array}{lll}
 1) \sqrt{\frac{6-t}{t}}; & 2) \sqrt{\frac{t}{2-t}}; & 3) \sqrt{\frac{t+4}{t-5}}; \\
 4) \sqrt{\frac{t-6}{t+7}}; & 5) \sqrt{\frac{-t}{25^2-49^2}}; & 6) \sqrt{\frac{9^2-5^2}{-t}}.
 \end{array}$$

4.121*. Решите уравнение:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{\sqrt{-x^{11}}}{\sqrt{-x^7}} = 0,49; & 2) \frac{\sqrt{-x^{15}}}{\sqrt{-x^{11}}} = 2,25; \\
 3) \frac{\sqrt{(x+1)^{18}}}{\sqrt{(x+1)^{14}}} = 100; & 4) \frac{\sqrt{(x-2)^{23}}}{\sqrt{(x-2)^{19}}} = 64; \\
 5) \frac{\sqrt{(5-x)^{12}}}{\sqrt{(x-5)^8}} = 36; & 6) \frac{\sqrt{(1-x)^{14}}}{\sqrt{(x-1)^{10}}} = 4.
 \end{array}$$

4.122*. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}} > 3; & 2) \frac{\sqrt{x^8}}{\sqrt{x^6}} \leq 5; \\
 3) \frac{\sqrt{(x-3)^3}}{\sqrt{x-3}} < 6; & 4) \frac{\sqrt{(x+4)^5}}{\sqrt{(x+4)^3}} > 2; \\
 5) \frac{\sqrt{(2-x)^6}}{\sqrt{(x-2)^2}} > 7; & 6) \frac{\sqrt{(1-x)^{12}}}{\sqrt{(x-1)^{10}}} < 8.
 \end{array}$$

4.5. Вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под знак корня

Воспользовавшись теоремой о квадратном корне из произведения, преобразуем выражение $\sqrt{98}$ следующим образом:

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{7^2} \sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

Преобразование выражения $\sqrt{98}$ к виду $7\sqrt{2}$ называется *вынесением множителя из-под знака квадратного корня*. С другой стороны, преобразование выражения $7\sqrt{2}$ к виду $\sqrt{98}$ называют *внесением множителя под знак квадратного корня*.

Теорема. При любом значении a и при любом значении $b \geq 0$ верно равенство

$$\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}. \quad (1)$$

Доказательство. Поскольку в теореме речь идет о значениях a и b , то все рассматриваемые далее равенства числовые. А так как $b \geq 0$, то каждое из выражений $\sqrt{a^2 b}$ и $|a| \sqrt{b}$ имеет смысл.

Воспользовавшись теоремой об арифметическом квадратном корне из произведения и тождеством $\sqrt{a^2} = |a|$, получим

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = |a| \sqrt{b}.$$

Тем самым мы доказали, что равенство (1) является тождеством, так как оно обращается в верное числовое равенство при любых значениях a и b , при которых выражения $\sqrt{a^2 b}$ и $|a| \sqrt{b}$ имеют смысл. $\square$

Равенство (1) показывает, как *выносить множитель из-под знака квадратного корня*.

Поменяв в тождестве (1) левую и правую части местами, получим

$$|a| \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}. \quad (2)$$

Из равенства (2) следуют свойства:



- 1) если $a \geq 0$, то $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$;
 2) если $a < 0$, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$.

Эти свойства показывают, как **вносить множитель под знак квадратного корня**.

Пример 1. Вынести множитель из-под знака квадратного корня при $c < 0$, $p > 0$:

а) $\sqrt{162c^6p^2}$; б) $\sqrt{48c^4p^9}$.

Решение.

а) $\sqrt{162c^6p^2} = \sqrt{81 \cdot 2(c^3)^2 p^2} = \sqrt{9^2 (\sqrt{2})^2 (c^3)^2 p^2} =$

↓ используем тождество (1) ↓

$$= 9\sqrt{2} |c^3| \cdot |p| =$$

↓ так как $c < 0$, то $c^3 < 0$, и согласно определению модуля $|c^3| = -c^3$; а так как $p > 0$, то $|p| = p$ ↓

$$= 9\sqrt{2}(-c^3)p = -9\sqrt{2}c^3p.$$

б) $\sqrt{48c^4p^9} = \sqrt{16 \cdot 3(c^2)^2 (p^4)^2 p} =$

↓ используем тождество (1) ↓

$$= 4\sqrt{3} |c^2| \cdot |p^4| \sqrt{p} =$$

↓ по определению модуля имеем ↓

$$= 4\sqrt{3}c^2p^4\sqrt{p}.$$

Ответ: а) $-9\sqrt{2}c^3p$; б) $4\sqrt{3}c^2p^4\sqrt{p}$.

Пример 2. В выражении $p^3\sqrt{13}$ внести множитель под знак квадратного корня при $p < 0$.

Решение. Поскольку $p^3 < 0$, то на основании свойства 2) имеем:

$$p^3\sqrt{13} = -\sqrt{(p^3)^2 13} = -\sqrt{13p^6}.$$

Поясним еще раз появление минуса перед знаком квадратного корня. При $p < 0$ значения выражения $p^3\sqrt{13}$ от-

рицательные. Поэтому после любого тождественного преобразования этого выражения должно получиться выражение, значения которого также отрицательны.

Проверить, верен ли результат, можно, вынося множитель из-под знака квадратного корня в выражении $-\sqrt{13p^6}$ и при этом учитывая, что $p < 0$:

$$-\sqrt{13p^6} = -|p^3| \sqrt{13} = -(-p^3) \sqrt{13} = p^3 \sqrt{13}.$$

Пример 3. Найти значение выражения

$$T = \frac{1}{7-2x} \cdot \sqrt{49-28x+4x^2}$$

при условии:

а) $x > 3,5$; б) $x < 3,5$.

Решение. а) При $x > 3,5$ имеем $7-2x < 0$, значит, внося отрицательный множитель $\frac{1}{7-2x}$ под знак квадратного корня на основании свойства 2), получим:

$$T = -\sqrt{\frac{1}{(7-2x)^2} \cdot (7-2x)^2} = -1.$$

б) При $x < 3,5$ имеем $7-2x > 0$, поэтому, внося положительный множитель $\frac{1}{7-2x}$ под знак квадратного корня на основании свойства 1), получим:

$$T = \sqrt{\frac{1}{(7-2x)^2} \cdot (7-2x)^2} = 1.$$

Ответ: а) $T = -1$ при $x > 3,5$; б) $T = 1$ при $x < 3,5$.



Пример 3 можно решить иначе.

Вынесем множитель из-под знака квадратного корня:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{7-2x} \cdot \sqrt{7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2x + (2x)^2} = \\ &= \frac{1}{7-2x} \cdot \sqrt{(7-2x)^2} = \frac{1}{7-2x} \cdot |7-2x|. \end{aligned}$$

Используя определение модуля, найдем значения T :

а) $T|_{x > 3,5} = \frac{1}{7-2x} \cdot (-(7-2x)) = -1.$

б) $T|_{x < 3,5} = \frac{1}{7-2x} \cdot (7-2x) = 1.$



1. Приведите пример вынесения множителя из-под знака корня.
2. Приведите пример внесения множителя под знак корня.
3. Докажите тождество $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$.
4. Сформулируйте свойства 1) и 2) о внесении множителя под знак квадратного корня.

Упражнения

Вынесите множитель из-под знака квадратного корня (4.123—4.124).

4.123°. 1) $\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{75}$; 3) $\sqrt{125}$;
 4) $\sqrt{32}$; 5) $\sqrt{72}$; 6) $\sqrt{800}$;
 7) $\sqrt{180}$; 8) $\sqrt{98}$; 9) $\sqrt{56}$;
 10) $\sqrt{288}$; 11) $\sqrt{0,32}$; 12) $\sqrt{0,72}$.

4.124°. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{56}$; 2) $-\frac{1}{7}\sqrt{196}$; 3) $-1,6\sqrt{50}$;
 4) $2,4\sqrt{600}$; 5) $\frac{5}{8}\sqrt{3\frac{21}{25}}$; 6) $0,1\sqrt{20\,000}$;
 7) $-0,2\sqrt{275}$; 8) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 9) $0,5\sqrt{60}$;
 10) $-0,1\sqrt{150}$; 11) $2,4\sqrt{300}$; 12) $1\frac{3}{4}\sqrt{48}$.

4.125. Докажите, что:

1) $12 \cdot \sqrt{\frac{1}{144}a} = \sqrt{a}$; 2) $\sqrt{k} = \frac{1}{15} \cdot \sqrt{225k}$.

Вынесите множитель из-под знака квадратного корня при условии, что все переменные принимают только положительные значения (4.126—4.130).

4.126°. 1) $\sqrt{32m}$; 2) $\sqrt{18n}$; 3) $\sqrt{25c}$; 4) $\sqrt{49c}$;
 5) $\sqrt{3a^2b}$; 6) $\sqrt{5ab^2}$; 7) $\sqrt{6p^4}$; 8) $\sqrt{13p^6}$.

4.127°. 1) $\sqrt{\frac{k}{121}}$; 2) $\sqrt{\frac{k}{225}}$; 3) $\sqrt{\frac{a^4}{b^3}}$;
 4) $\sqrt{\frac{a^3}{b^8}}$; 5) $\sqrt{\frac{144x}{y^5}}$; 6) $\sqrt{\frac{9x^5}{16y^2}}$.

4.128. 1) $\sqrt{12k}$; 2) $\sqrt{75k^5}$; 3) $\sqrt{15k^7}$;
 4) $\sqrt{49k^9}$; 5) $\sqrt{2k^7t^5}$; 6) $\sqrt{32t^5k^3}$;
 7) $\sqrt{98t^7k^5}$; 8) $\sqrt{72t^{11}k^4}$; 9) $\sqrt{867k^{17}t^{24}}$.

4.129. 1) $\sqrt{\frac{49k}{y^2t^3}}$; 2) $\sqrt{\frac{k^5y^8}{64t}}$; 3) $\frac{1}{k}\sqrt{5k^9}$;
 4) $\frac{6}{y}\sqrt{6y^7}$; 5) $t\sqrt{\frac{t^5}{3k^2}}$; 6) $\frac{t}{k}\sqrt{\frac{2k^9}{t^2}}$;
 7) $2p\sqrt{\frac{8p^5}{c^6}}$; 8) $3c^2\sqrt{\frac{p^4}{18c^3}}$; 9) $\frac{3t}{2k}\sqrt{\frac{16k^{20}}{81t^3}}$.

4.130. 1) $\sqrt{a^3b^2c}$; 2) $\sqrt{a^5bc^2}$; 3) $\sqrt{ab^6c^4}$;
 4) $\sqrt{a^7b^3c^5}$; 5) $\sqrt{16a^2b^7c^9}$; 6) $\sqrt{25a^4b^9c^{11}}$.

Вынесите множитель из-под знака квадратного корня (4.131—4.136).

4.131. 1)° $\sqrt{9a^2}$ при $a < 0$; 2)° $\sqrt{4b^6}$ при $b \geq 0$;
 3)° $\sqrt{450b^6}$ при $b < 0$; 4)° $\sqrt{392a^2}$ при $a < 0$;
 5) $\sqrt{49a^4b^{10}}$ при $b < 0$; 6) $\sqrt{25a^{12}b^{14}}$ при $b < 0$;
 7) $\sqrt{2^6b^{10}d^4}$ при $b < 0$;
 8) $\sqrt{6,25m^6n^{18}}$ при $m < 0, n < 0$;
 9) $\sqrt{5\frac{1}{16}x^{18}y^{23}}$ при $x < 0$;
 10) $\sqrt{\frac{64}{25}b^8c^{25}}$.

4.132. 1) $\sqrt{9m^3n^2}$ при $n < 0$; 2) $\sqrt{16m^2n^4}$ при $m < 0$;
 3) $\sqrt{169m^4n^5}$; 4) $\sqrt{50m^3n^6}$ при $n < 0$;
 5) $\sqrt{32m^6n^5}$ при $m < 0$; 6) $\sqrt{128m^8n^6}$ при $n < 0$;
 7) $\sqrt{18a^4b^8}$; 8) $\sqrt{8c^{16}d^{24}}$;
 9) $\sqrt{243a^{16}b^{12}}$; 10) $\sqrt{125c^8d^{20}}$.

- 4.133.** 1) $\sqrt{a^{2n}b^{4m}c^5}$ при $a > 0$;
 2) $\sqrt{a^{4n+2}b^{4m}c^7}$ при $a < 0$;
 3) $\sqrt{a^{4n+4}b^{2m+2}c^9}$ при $b > 0$;
 4) $\sqrt{a^{4n+6}b^{4m}c^3}$ при $a < 0$.
- 4.134.** 1) $\sqrt{128x^5(a+b)^5}$ при $a > 0, b > 0$;
 2) $\sqrt{245a^3y^5(a-b)^3}$ при $a < 0, b > 0$;
 3) $\sqrt{160a^5b^6(x+y)^{11}}$ при $b < 0, x+y < 0$;
 4) $\sqrt{24,5x^4y^5(x-y)^7}$ при $x-y > 0$;
 5) $\frac{1}{6}\sqrt{27(x^2+6xy+9y^2)}$;
 6) $7\sqrt{\frac{25x^2-10xy+y^2}{343}}$;
 7) $(p-c)\sqrt{\frac{18}{p^2-2pc+c^2}}$ при $p > c$;
 8) $(p^2-c^2)\sqrt{\frac{8}{p^4-2p^2c^2+c^4}}$ при $p^2 < c^2$.
- 4.135°.** 1) $\sqrt{-3b^3}$; 2) $\sqrt{-7m^5}$; 3) $\sqrt{-32m^7}$;
 4) $\sqrt{-64n^{11}}$; 5) $\sqrt{-27a^{15}}$; 6) $\sqrt{-675t^{13}}$.
- 4.136°.** 1) $-k\sqrt{-5k^7}$; 2) $-4t\sqrt{-72t^{21}}$;
 3) $-\frac{1}{5}p\sqrt{-125p^9}$; 4) $-\frac{1}{7}b\sqrt{-147b^3}$;
 5) $-0,1m\sqrt{-0,0001m^{41}}$; 6) $-3d^2\sqrt{-\frac{1}{243}d^{19}}$.
- Внесите множитель под знак квадратного корня (**4.137—4.138**).
- 4.137°.** 1) $3\sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{5}$; 3) $-9\sqrt{0,2}$;
 4) $-7\sqrt{0,8}$; 5) $\frac{4}{5}\sqrt{0,5}$; 6) $\frac{2}{3}\sqrt{0,81}$;
 7) $-2\sqrt{\frac{1}{12}}$; 8) $-3\sqrt{\frac{1}{18}}$; 9) $5\sqrt{\frac{1}{125}}$;
 10) $-7\sqrt{\frac{1}{343}}$.

- 4.138°. 1) $5a^2\sqrt{b}$; 2) $3b^4\sqrt{c}$; 3) $2|x|\sqrt{y^2}$;
4) $7|c|\sqrt{d^2}$; 5) $-3\sqrt{a}$; 6) $-4\sqrt{t^3}$.

4.139°. Внесите множитель под знак квадратного корня при условии, что все переменные принимают только положительные значения:

- 1) $p\sqrt{3}$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $p\sqrt{p}$;
4) $\frac{1}{k}\sqrt{k^4}$; 5) $p\sqrt{\frac{1}{p}}$; 6) $k\sqrt{k^2}$;
7) $3p^2\sqrt{2k}$; 8) $k^4\sqrt{3p^2}$; 9) $\frac{1}{p}\sqrt{2kp^3}$;
10) $\frac{1}{k}\sqrt{3k^3p}$; 11) $(p+1)\sqrt{p}$; 12) $(k+3)\sqrt{k}$.

4.140. Внесите множитель под знак квадратного корня при $p > 0$ и $k > 0$:

- 1)° $p\sqrt{5}$; 2)° $p\sqrt{7}$; 3)° $-p\sqrt{5}$;
4)° $-p\sqrt{7}$; 5)° $-p\sqrt{k}$; 6)° $p\sqrt{k}$;
7)° $7p^3\sqrt{k}$; 8)° $9p^5\sqrt{k}$; 9) $-2pk\sqrt{\frac{k}{8p^2}}$;
10) $-3p^3k\sqrt{\frac{k}{3p^4}}$;
11) $-\frac{1}{3p^3k}\sqrt{\frac{9p^2k}{5}}$;
12) $\frac{-k}{2p^2}\sqrt{\frac{8p^2}{3k}}$.

4.141. В упражнении 4.140 внесите множитель под знак квадратного корня при $p < 0$ и $k > 0$.

Внесите множитель под знак квадратного корня (4.142—4.148).

- 4.142. 1) $\frac{2a}{b}\sqrt{\frac{b^5}{2a}}$; 2) $\frac{5a^2}{7}\sqrt{\frac{8}{5a}}$; 3) $\frac{5x}{2y}\sqrt{\frac{6y^3}{5x}}$;
4) $\frac{3a}{4b}\sqrt{\frac{16b^5}{3a}}$; 5) $\frac{2}{a}\sqrt{-\frac{a^3}{8}}$; 6) $\frac{1}{4a}\sqrt{-64a^5}$.

- 4.143. 1) $-a\sqrt{3a}$; 2) $-t^3\sqrt{2t}$;
3) $-m^5\sqrt{5m}$; 4) $-d^7\sqrt{7d}$.

- 4.144. 1) $b\sqrt{3b^2c}$ при $b > 0$; 2) $p\sqrt{5p^4n}$ при $p > 0$;
 3) $-b\sqrt{6b^2c}$ при $b > 0$; 4) $-p^3n^2\sqrt{7p^2n^4}$ при $p > 0$;
 5) $b\sqrt{7b^4c}$ при $b < 0$; 6) $p\sqrt{2np^6}$ при $p < 0$;
 7) $-b\sqrt{5b^6c}$ при $b < 0$; 8) $-p\sqrt{11np^2}$ при $p < 0$.

- 4.145. 1) $(3 - \sqrt{10})\sqrt{2}$; 2) $(2 - \sqrt{5})\sqrt{3}$;
 3) $(5 - \sqrt{3})\sqrt{5}$; 4) $(7 - \sqrt{6})\sqrt{7}$;
 5) $(4 - \sqrt{17})\sqrt{3}$; 6) $(10 - \sqrt{93})\sqrt{2}$;
 7) $(\sqrt{3} - 2)\sqrt{ab}$; 8) $(2 - \sqrt{7})\sqrt{a^3b}$.

- 4.146. 1) $(a - b)\sqrt{\frac{2}{b - a}}$; 2) $(m - n)\sqrt{\frac{1}{n - m}}$;
 3) $y(a - b)\sqrt{\frac{b}{a - b}}$ при $a < b$, $y > 0$;
 4) $x(a + b)\sqrt{\frac{2a}{a + b}}$ при $x < 0$, $a > 0$, $b > 0$;
 5) $(x + y)^2\sqrt{\frac{m}{x + y}}$ при $m < 0$;
 6) $3(c - d)\sqrt{\frac{2m}{c^2 - d^2}}$ при $d > 0$, $c > d$.

- 4.147. 1) $a\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}}$ ($a > 0$); 2) $b\sqrt{\frac{1}{b^3} + \frac{1}{b}}$;
 3) $3b\sqrt{\frac{2}{b^2} + \frac{3}{b}}$ ($b > 0$); 4) $2a\sqrt{\frac{3}{a} + \frac{4}{a^3}}$;
 5) $(a - 5)\sqrt{\frac{1}{a - 5}}$; 6) $(b - 6)\sqrt{\frac{1}{6 - b}}$;
 7) $(b - 7)\sqrt{\frac{1}{3b - 21}}$; 8) $(a - 8)\sqrt{\frac{1}{24 - 3a}}$.

- 4.148. 1) $2x\sqrt{\frac{3}{x}} + 6\sqrt{\frac{x}{3}}$; 2) $\frac{3}{5}\sqrt{75x} + \frac{2x}{3}\sqrt{\frac{27}{x}} + \frac{4}{7x^2}\sqrt{98x^5}$.

4.149. Найдите значение выражения:

1) $(2x - 3)\sqrt{\frac{1}{4x^2 - 12x + 9}}$ при

а) $x > \frac{3}{2}$, б) $x < \frac{3}{2}$;

2) $(5 - 4x)\sqrt{\frac{1}{16x^2 - 40x + 25}}$ при

а) $x > \frac{5}{4}$, б) $x < \frac{5}{4}$.

4.150. При каких значениях a верно равенство:

1) $a\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; 2) $a\sqrt{-a} = -\sqrt{-a^3}$;

3) $-a\sqrt{a} = -\sqrt{a^3}$; 4) $a\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}$?

4.151. При каких значениях p верно равенство:

1) $p\sqrt{3} = -\sqrt{3p^2}$; 2) $p^2\sqrt{7} = \sqrt{7p^4}$;

3) $p\sqrt{5p} = \sqrt{5p^3}$; 4) $3p^3\sqrt{2} = \sqrt{18p^6}$;

5) $p^4\sqrt{2} = \sqrt{2p^8}$; 6) $p\sqrt{8} = \sqrt{8p^2}$?

Укажите естественную область определения выражения (4.152—4.153).

4.152. 1) $-p\sqrt{15p}$; 2) $-p\sqrt{-17p}$; 3) $-p\sqrt{19p^2}$;

4) $-p\sqrt{17p^2}$; 5) $-p\sqrt{19p^3}$; 6) $-p\sqrt{11p^5}$.

4.153. 1) $p\sqrt{113}$; 2) $p\sqrt{113p}$; 3) $p\sqrt{-113p}$;

4) $p\sqrt{-113p^2}$; 5) $p\sqrt{113p^2}$; 6) $p^5\sqrt{-113p^7}$.

4.154*. Вынесите множитель из-под знака квадратного корня:

1) $\sqrt{-7m^5k^8}$; 2) $\sqrt{32a^3b^{12}}$; 3) $\sqrt{-8c^7b^3}$;

4) $\sqrt{-54a^5b^4}$; 5) $\sqrt{700a^5b^{24}}$; 6) $\sqrt{4x^{16}y^5}$.

4.155*. Внесите множитель под знак квадратного корня:

1) $xy^2\sqrt{x^5y}$, если $y < 0$;

2) $-2x^3y\sqrt{\frac{1}{16}x^3y^5}$, если $y < 0$;

3) $-2x^2y^5\sqrt{\frac{1}{8}x^5y^3}$, если $x < 0$;

4) $-a^2b\sqrt{ab}$, если $a < 0$;

5) $7x\sqrt{\frac{1}{49}x^3y^7}$, если $y < 0$;

6) $t^3p\sqrt{-3t^2p}$, если $t < 0$.

4.156. Приведите выражение к виду $a\sqrt{b}$, где b — наименьшее возможное натуральное число:

- | | |
|---|---|
| 1) $5\sqrt{18} - \sqrt{2}$; | 2) $\frac{1}{6}\sqrt{72} + 4\sqrt{2}$; |
| 3) $6\sqrt{243} + \sqrt{75}$; | 4) $2\sqrt{45} + 2\sqrt{20}$; |
| 5) $4\sqrt{40} + 5\sqrt{90} - 2\sqrt{10}$; | 6) $5\sqrt{28} - 2\sqrt{112} + 5\sqrt{63}$; |
| 7) $\frac{1}{7}\sqrt{147} + 3\sqrt{48} - \sqrt{75}$; | 8) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{32} - \frac{1}{2}\sqrt{128}$. |

4.157. Выполните действия:

- 1) $4\sqrt{72} - 0,25\sqrt{32} + 3\sqrt{200}$;
- 2) $3\sqrt{8} - \sqrt{18} + 0,5\sqrt{32}$;
- 3) $2\sqrt{343} - \frac{1}{6}\sqrt{252} + 3\sqrt{7}$;
- 4) $5\sqrt{3} + 0,1\sqrt{30\,000} - \frac{1}{3}\sqrt{27}$.

4.158. Верно ли равенство:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $3\sqrt{2} + 2 - \sqrt{18} = 2$; | 2) $1 + 3\sqrt{45} = 1 + 15\sqrt{5}$; |
| 3) $5 - \sqrt{48} + 4\sqrt{3} = -5$; | 4) $\sqrt{500} - 10\sqrt{3} + 3 = 3$? |

4.159. Выполните действия:

- 1) $(\sqrt{12} - 5\sqrt{8}) - (3\sqrt{2} + \sqrt{27})$;
- 2) $(2,5\sqrt{200} - \sqrt{75}) + (\sqrt{32} - \sqrt{147})$;
- 3) $(3\sqrt{20} + \sqrt{28}) + (\sqrt{45} - \sqrt{63})$;
- 4) $(3,5\sqrt{300} - \sqrt{5}) - (3\sqrt{48} + \sqrt{80})$;
- 5) $8\sqrt{6} \cdot \left(4\sqrt{8} + \frac{1}{4}\sqrt{12} - \frac{1}{2}\sqrt{32}\right)$;
- 6) $\frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot (2\sqrt{125} - 5\sqrt{5} - 10\sqrt{15})$.

Упростите выражение (4.160—4.161).

- 4.160.** 1) $0,2\sqrt{25a^5} + 0,5\sqrt{4a^7} + 2\sqrt{a}$;
- 2) $6\sqrt{0,25x^7y^9} + 5\sqrt{0,09x^3y^3} - 4\sqrt{0,25x^3y^5}$, $x \leq 0, y \leq 0$.
- 4.161.** 1) $\sqrt{m^3 - n^3 + m^2n - mn^2}$ ($m > n > 0$);
- 2) $\sqrt{m^3 + m^2 - m - 1}$ ($m > 1$);

$$3) m^3 \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{2m-1}{m^4}} \quad (m < 1, m \neq 0);$$

$$4) \frac{m^2}{3-m} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{3(3-2m)}{m^3}} \quad (m > 3).$$

4.6. Некоторые примеры на действия с квадратными корнями

Пример 1. Разложить на множители выражение

$$a^2 - 3.$$

Решение.

$$a^2 - 3 = a^2 - (\sqrt{3})^2 =$$

↓ по формуле разности квадратов получим ↓

$$= (a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}).$$

Пример 2. Сократить дробь $\frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{17 - m}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{17 - m} &= \frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{(\sqrt{17})^2 - (\sqrt{m})^2} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{(\sqrt{17} - \sqrt{m})(\sqrt{17} + \sqrt{m})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{m}}. \end{aligned}$$



Можно поступить иначе. Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{m} - \sqrt{17}$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{m} + \sqrt{17}}{17 - m} &= \frac{(\sqrt{m} + \sqrt{17})(\sqrt{m} - \sqrt{17})}{(17 - m)(\sqrt{m} - \sqrt{17})} = \\ &= \frac{m - 17}{(17 - m)(\sqrt{m} - \sqrt{17})} = \frac{1}{-(\sqrt{m} - \sqrt{17})} = \frac{1}{\sqrt{17} - \sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{7\sqrt{x} - 2}{3} - 2 = \frac{5\sqrt{x} - 6}{2}.$$

Решение. *Способ 1.* Умножим обе части данного уравнения на 6:

$$(7\sqrt{x} - 2) \cdot 2 - 2 \cdot 6 = (5\sqrt{x} - 6) \cdot 3.$$

Решим полученное уравнение:

$$14\sqrt{x} - 4 - 12 = 15\sqrt{x} - 18;$$

$$15\sqrt{x} - 14\sqrt{x} = -4 - 12 + 18;$$

$$\sqrt{x} = 2;$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.



Способ 2. Обозначим $\sqrt{x} = t$. Подставив t вместо $\sqrt{x}$ в данном уравнении, получим

$$\frac{7t-2}{3} - 2 = \frac{5t-6}{2}.$$

Решив это уравнение, имеем $t = 2$, значит, $\sqrt{x} = 2$, откуда $x = 4$.

Пример 4. Решить уравнение:

а) $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3$; б) $(\sqrt{x})^4 = 9$.

Решение. *Способ 1.* а) Поскольку при любом неотрицательном значении x верно равенство $(\sqrt{x})^2 = x$, то данное уравнение при $x \geq 0$ равносильно уравнению $2x + 4 = x + 3$. Решив это уравнение, найдем $x = -1$, что не соответствует неравенству $x \geq 0$. Таким образом, данное уравнение не имеет корней.

б) Уравнение $(\sqrt{x})^4 = 9$ при $x \geq 0$ равносильно уравнению $x^2 = 9$. Решив уравнение $x^2 = 9$, получим: $x = -3$ или $x = 3$. Но поскольку корнем исходного уравнения может быть только неотрицательное значение x , то корнем является число 3.

Ответ: а) нет корней; б) 3.



Решение примера 4 можно оформить и так:

а) $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + 4 = x + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x = -1. \end{cases}$

Последняя система не имеет решений.

Ответ: нет корней.

б) $(\sqrt{x})^4 = 9; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ (x = -3 \text{ или } x = 3); \end{cases} \quad x = 3.$

Ответ: 3.



Способ 2. а) $2(\sqrt{x})^2 + 4 = x + 3;$

$$2x + 4 = x + 3;$$

$$x = -1.$$

Проверка: подставив $x = -1$ в исходное уравнение, получим $2(\sqrt{-1})^2 + 4 = -1 + 3$ — неверное числовое равенство, так как выражение $\sqrt{-1}$ не имеет смысла, значит, корней нет.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & (\sqrt{x})^4 = 9; \\ & x^2 = 9; \\ & x = -3 \text{ или } x = 3. \end{aligned}$$

Проверка. При $x = -3$ в левой части исходного уравнения получим выражение $(\sqrt{-3})^4$, которое не имеет смысла. Значит, число -3 не является корнем уравнения. При $x = 3$ исходное уравнение обращается в верное числовое равенство $(\sqrt{3})^4 = 9$, т. е. $9 = 9$, значит, число 3 — корень уравнения.

Пример 5. Упростить выражение

$$T = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) - (a - \sqrt{2a})(a + \sqrt{2a}).$$

Решение. *Способ 1.*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1 - a\sqrt{a} + \sqrt{a}(1 - \sqrt{a})}{1 - \sqrt{a}} \cdot \frac{1 + a\sqrt{a} - \sqrt{a}(1 + \sqrt{a})}{1 + \sqrt{a}} - (a^2 - (\sqrt{2a})^2) = \\ &= \frac{(1 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a)(1 + a\sqrt{a} - \sqrt{a} - a)}{1 - a} - a^2 + 2a = \\ &= \frac{((1 - a) + \sqrt{a}(1 - a))((1 - a) - \sqrt{a}(1 - a))}{1 - a} - a^2 + 2a = \\ &= \frac{(1 - a)(1 + \sqrt{a})(1 - a)(1 - \sqrt{a})}{1 - a} - a^2 + 2a = \\ &= (1 - a)(1 - a) - a^2 + 2a = \\ &= 1 + a^2 - 2a - a^2 + 2a = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $T = 1$.



Способ 2. Пример 5 можно решать не «цепочкой», а «по действиям». Определите порядок действий в выражении T и выполните эти действия по отдельности.



▲ Способ 3. В выражении T квадратный корень из a можно обозначить какой-нибудь буквой, например буквой y , и, получив выражение без корней, преобразовать его.

Итак, пусть $\sqrt{a} = y$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{1-y^3}{1-y} + y \right) \left(\frac{1+y^3}{1+y} - y \right) - (y^2 - \sqrt{2}y)(y^2 + \sqrt{2}y) = \\ &= \left(\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{1-y} + y \right) \left(\frac{(1+y)(1-y+y^2)}{1+y} - y \right) - (y^4 - 2y^2) = \\ &= (1+2y+y^2)(1-2y+y^2) - (y^4 - 2y^2) = \\ &= (1+y)^2(1-y)^2 - y^4 + 2y^2 = (1-y^2)^2 - y^4 + 2y^2 = \\ &= 1 - 2y^2 + y^4 - y^4 + 2y^2 = 1. \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 6. Доказать тождество:

- а) $a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}$;
 б) $a + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab}$;
 в) $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Доказательство. а) Правая часть данного равенства имеет смысл при $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Преобразуем ее, используя формулу квадрата суммы и свойства квадратных корней:

$$\begin{aligned} &(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} - 2\sqrt{ab} = \\ &= a + b + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} = a + b; \end{aligned}$$

получили левую часть данного равенства. $\square$

б) Доказательство аналогично доказательству тождества а) — выполните его самостоятельно.

в) Правая часть данного равенства имеет смысл при $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Преобразуем ее, используя формулу разности квадратов и свойства квадратных корней:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b;$$

получили левую часть данного равенства. $\square$

▲ Пример 7. Доказать, что число $7\sqrt{5} - 4$ является иррациональным.

Доказательство. Допустим противное: $7\sqrt{5} - 4 = r$ — рациональное число. Тогда получим:

$$\begin{aligned} 7\sqrt{5} &= r + 4; \\ \sqrt{5} &= \frac{r+4}{7}. \end{aligned}$$

Но $\frac{r+4}{7}$ является рациональным числом, а число $\sqrt{5}$ — иррациональное (докажите это). Их равенство невозможно. Предположив, что $7\sqrt{5} - 4$ — рациональное число, мы пришли к противоречию. Значит, $7\sqrt{5} - 4$ — иррациональное число. ☒

Пример 8. Доказать, что число $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ является иррациональным.

Доказательство. Допустим противное: $\sqrt{7} - \sqrt{3} = r$ — рациональное число, тогда:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = r^2;$$

$$10 - 2\sqrt{21} = r^2;$$

$$\sqrt{21} = \frac{10 - r^2}{2}.$$

Но $\frac{10 - r^2}{2}$ является рациональным числом, а $\sqrt{21}$ — иррациональное число (докажите это). Такое равенство не может быть верным. Предположив, что $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ — рациональное число, мы пришли к противоречию. Значит, $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ — иррациональное число. ☒▲



1. Представьте число $p \geq 0$ в виде степени с основанием $\sqrt{p}$.
2. Пусть p и t — неотрицательные числа. Разложите на множители выражение $p - t$ по формуле разности квадратов.
- 3*. Пусть p и t — неотрицательные числа. Разложите на множители выражение:
 - а) $p\sqrt{p} + t\sqrt{t}$ по формуле суммы кубов;
 - б) $p\sqrt{p} - t\sqrt{t}$ по формуле разности кубов.

Упражнения

4.162°. Разложите на множители по образцу

$$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}):$$

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) $x^2 - 5$; | 2) $y^2 - 13$; | 3) $k^2 - 10$; | 4) $p^2 - 22$; |
| 5) $c^2 - 17$; | 6) $7 - d^2$; | 7) $11 - a^2$; | 8) $b^2 - 8$. |

Сократите дробь (4.163—4.164).

4.163°. 1) $\frac{y^2-5}{y+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{p^2-7}{p-\sqrt{7}}$; 3) $\frac{k-\sqrt{2}}{k^2-2}$;
 4) $\frac{t+\sqrt{6}}{t^2-6}$; 5) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{m}-m}{\sqrt{m}-1}$;
 7) $\frac{5+\sqrt{n}}{5\sqrt{n}+n}$; 8) $\frac{2\sqrt{m}-3\sqrt{n}}{4m-9n}$.

4.164. 1) $\frac{6-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$; 2) $\frac{9a-3}{3\sqrt{a}-\sqrt{3}}$;
 3) $\frac{5-\sqrt{3}}{3-5\sqrt{3}}$; 4) $\frac{9a^2+b+6a\sqrt{b}}{9a^2-b}$;
 5) $\frac{11-a}{(\sqrt{a}-\sqrt{11})^2}$ при $a \geq 14$; 6) $\frac{n-8}{(\sqrt{n}-\sqrt{8})^2}$ при $n \geq 9$;
 7) $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})^2}{x-3}$ при $x \geq 4$; 8) $\frac{(\sqrt{13}+\sqrt{y})^2}{y-13}$ при $y \geq 15$.

Решите уравнение (4.165—4.170).

4.165. 1) $(5-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}) = -x+65$;
 2) $(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+9) = 3+x$;
 3) $2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3) = 2x+13$;
 4) $2(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+4) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) - (\sqrt{x}+4)^2 = -37$;
 5) $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) - 2(\sqrt{x}-3)^2 + (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4) = 3$;
 6) $(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1) - (2\sqrt{x}-3)^2 - 10\sqrt{x} = 6$.

4.166. 1) $\frac{6\sqrt{x}+7}{7} - 3 = \frac{5\sqrt{x}-3}{8}$;
 2) $\frac{\sqrt{x}-4}{5} + 2,4 = \frac{41-2\sqrt{x}}{9}$;
 3) $\frac{6\sqrt{x}+3}{11} + \frac{3\sqrt{x}-1}{2} = 10$;
 4) $2 + \frac{\sqrt{x}+17}{5} = \frac{3\sqrt{x}-7}{4}$.

$$4.167. \quad 1) \frac{\sqrt{x}-3}{4} - \frac{\sqrt{x}-1}{8} = \frac{\sqrt{x}-5}{2} - \frac{\sqrt{x}-4}{3};$$

$$2) \frac{8-\sqrt{x}}{6} = \frac{\sqrt{x}+6}{2} + \frac{5-4\sqrt{x}}{3};$$

$$3) \frac{9\sqrt{x}+7}{2} + \frac{\sqrt{x}-2}{7} = 36 + \sqrt{x};$$

$$4) \frac{7+9\sqrt{x}}{4} + \frac{2-\sqrt{x}}{9} = 7\sqrt{x} + 1.$$

$$4.168. \quad 1) \frac{3(\sqrt{x}+1)}{5} - \frac{2(2\sqrt{x}-5)}{11} = \frac{3(\sqrt{x}-11)}{4};$$

$$2) \frac{3\sqrt{x}+13}{8} - \frac{3(2\sqrt{x}-3)}{5} = \frac{2(4-\sqrt{x})}{3} - 7;$$

$$3) \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{2(\sqrt{x}-7)}{3} = 14\frac{1}{2} - \frac{2(\sqrt{x}+3)}{5};$$

$$4) \frac{2(5\sqrt{x}-2)}{9} - 17 = \frac{4(23-2\sqrt{x})}{5} - \frac{5(11\sqrt{x}+1)}{9}.$$

$$4.169. \quad 1) \frac{5\sqrt{x}-4}{2} = \frac{16\sqrt{x}+1}{7};$$

$$2) \frac{5-\sqrt{x}}{8} = \frac{18-5\sqrt{x}}{12};$$

$$3) \frac{1-9\sqrt{x}}{5} = \frac{19+3\sqrt{x}}{8};$$

$$4) \frac{4\sqrt{x}+33}{21} = \frac{17+\sqrt{x}}{14}.$$

$$4.170^\circ. \quad 1) \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{\sqrt{x}+1};$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}-3};$$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-6};$$

$$4) \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3}.$$

Докажите тождество (4.171—4.172).

$$4.171. \quad 1) 7x - 16\sqrt{x} - 7 = 5(1-\sqrt{x})^2 - 3(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) - (3+\sqrt{x})^2;$$

$$2) (\sqrt{x}+4)^2 - (\sqrt{x}+8)(\sqrt{x}-8) = 17 + 50\sqrt{x} - 7x + 7(\sqrt{x}-3)^2.$$

$$4.172. \quad 1) \sqrt{m+\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}} + \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}}$$

при $m \geq 0, n \geq 0, m^2 - n \geq 0$;

$$2) \sqrt{m-\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2-n}}{2}} - \sqrt{\frac{m-\sqrt{m^2-n}}{2}}$$

при $m \geq 0, n \geq 0, m^2 - n \geq 0$.

Выполните действия (4.173—4.175).

4.173. 1) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;
2) $\frac{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$;
3) $\frac{20}{7-\sqrt{29}} - \frac{15}{6+\sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{29}-\sqrt{21}}$;
4) $\frac{5}{4+\sqrt{11}} + \frac{8}{\sqrt{19}-\sqrt{11}} - \frac{10}{\sqrt{19}+3}$.

4.174*. 1) $\frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{39-12\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{39+12\sqrt{3}}}$;
3) $\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}+1} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}}-1}$;
4) $\frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}-2} + \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{48}}+2}$.

4.175. 1) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{7}$;
2) $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Упростите выражение (4.176—4.179).

4.176. 1) $\frac{\sqrt{4-4a+a^2}}{a-2} - \frac{a-2}{a^2-4}$, если $a < 2$, $a \neq -2$;
2) $\frac{\sqrt{a^2-6a+9}}{3-a} + \frac{a-2}{\sqrt{a^2-4a+4}}$, если $a > 3$;
3) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;
4)* $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$.

$$\begin{aligned}
 4.177. \quad & 1) \left(\frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a}{\sqrt{a+1}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1}; \\
 & 2)^* \frac{a^2-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a+a}} - \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a+1}} + a+1; \\
 & 3) \left(1 + \sqrt{1-a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} \right) : \left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right); \\
 & 4) \left(\sqrt{a-a^2} + \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a}} \right) : \left(\frac{2-\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{1-a} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4.178*. \quad & 1) \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} + \frac{a^2-\frac{ab}{\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b}; \\
 & 2) \frac{a^2-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a+a}} - \frac{a^2+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a+a}}.
 \end{aligned}$$

$$4.179. \quad 1) \sqrt{(\sqrt{24} + \sqrt{40})(10 - \sqrt{60})};$$

$$2) \sqrt{\sqrt{6} + 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 12 + \sqrt{24}}.$$

4.180. Выполните действия и найдите значение выражения:

$$1) \frac{1+x}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}} \text{ при } x = 0,75;$$

$$2) \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-5}} + \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-5}} \text{ при } x = 3;$$

$$3) \left(1 + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right) \text{ при } x = 4, a = 5;$$

$$4) \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \text{ при } x = 3, a = 5.$$

Найдите значение выражения (4.181—4.182).

$$4.181. \quad 1)^\circ (-4\sqrt{3})^2;$$

$$2)^\circ (-5\sqrt{2})^2;$$

$$3)^\circ (2\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{2})^2;$$

$$4)^\circ (5\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{5})^2;$$

$$5) 18\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)^2 + \frac{1}{6}(4\sqrt{3})^2;$$

$$6) \frac{1}{3}(-7\sqrt{15})^2 - 32\left(-\frac{1}{2}\sqrt{11}\right)^2.$$

- 4.182°.** 1) $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3}$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5}$;
3) $\left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 - 2(\sqrt{3})^2$; 4) $(2\sqrt{7})^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2$;
5) $27\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$; 6) $\frac{1}{3}(\sqrt{12})^2 - 0,1(\sqrt{40})^2$.

Выполните действия (**4.183—4.185**).

- 4.183°.** 1) $(1 - \sqrt{441})(1 + \sqrt{441})$;
2) $(\sqrt{144} - 2)(\sqrt{144} + 2)$;
3) $(\sqrt{13\,025} + 5)(\sqrt{13\,025} - 5)$;
4) $(\sqrt{2025} - 1)(\sqrt{2025} + 1)$;
5) $(\sqrt{4225} - \sqrt{196})(\sqrt{4225} + \sqrt{196})$;
6) $(\sqrt{5625} - \sqrt{256})(\sqrt{5625} + \sqrt{256})$.
- 4.184°.** 1) $(\sqrt{5} + 2)^2$; 2) $(\sqrt{3} - 4)^2$; 3) $(3\sqrt{2} - 1)^2$;
4) $(5 + 2\sqrt{3})^2$; 5) $(6 - \sqrt{2})^2$; 6) $(\sqrt{7} + \sqrt{14})^2$.
- 4.185.** 1)° $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$;
2)° $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$;
3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$;
4) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$;
5) $(\sqrt{3} + 6)^2 - (4 - \sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3}$;
6) $(\sqrt{5} - 1)^2 - (6 - \sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5}$;
7) $(2 - \sqrt{10})^2 + (\sqrt{10} - 3)^2 - 3\sqrt{10}$;
8) $(4 + \sqrt{6})^2 - (3 - \sqrt{6})^2 - 7\sqrt{6}$.
- 4.186.** Найдите значение выражения $4y^2 - 5ay - 4a^2$ при:
1) $y = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, $a = \sqrt{6} - \sqrt{5}$;
2) $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

4.187. Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{20\sqrt{7} - 10\sqrt{3}}{8\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}; & 2) \frac{3\sqrt{5} - 18\sqrt{2}}{6\sqrt{5} - 36\sqrt{2}}; \\ 3) \frac{2\sqrt{3} + 6\sqrt{5}}{15\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}; & 4) \frac{12\sqrt{10} + 9\sqrt{2}}{36\sqrt{10} + 27\sqrt{2}}; \\ 5) \frac{4\sqrt{17} - 12\sqrt{7}}{18\sqrt{7} - 6\sqrt{17}}; & 6) \frac{12\sqrt{15} - 10\sqrt{5}}{20\sqrt{5} - 24\sqrt{15}}. \end{array}$$

4.188. Найдите значение выражения $\sqrt{m^2 + n^2}$ при:

$$\begin{array}{ll} 1) m = \sqrt{13}, n = 6; & 2) m = 3, n = 7; \\ 3) m = 5\sqrt{2}, n = -5\sqrt{2}; & 4) m = -9\sqrt{2}, n = 9\sqrt{2}. \end{array}$$

4.189°. Имеет ли смысл выражение:

$$\begin{array}{llll} 1) 2\frac{2}{9}; & 2) \frac{7}{3-6:2}; & 3) \sqrt{3}; & 4) \sqrt{-4}; \\ 5) 2^3; & 6) -\sqrt{9}; & 7) \sqrt{-1}; & 8) 1^{-1} : 3^0? \end{array}$$

4.190. Решите уравнение:

$$\begin{array}{l} 1) 3x - 5 = 10 - (\sqrt{x})^2; \\ 2) 4x + 4 = (\sqrt{x})^2 + 5; \\ 3) (\sqrt{5x})^2 + 3(3(\sqrt{x})^2 + 7) = 9; \\ 4) 8(\sqrt{x})^2 - ((\sqrt{7x})^2 + 8) = 2; \\ 5) 3(\sqrt{x-2})^2 - 2(\sqrt{x-1})^2 = 17; \\ 6) 4(\sqrt{2x-1})^2 + 3(\sqrt{1-2x})^2 = 7; \\ 7) \frac{(\sqrt{x})^2 + 3}{2} = (\sqrt{x})^2 - 4; \\ 8) 2 - 3(\sqrt{x})^2 = \frac{(\sqrt{x})^2 - 12}{2}. \end{array}$$

4.191*. Докажите, что число является иррациональным:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{7} + 3; & 2) \sqrt{10} - 4; & 3) 3\sqrt{5} - 2; \\ 4) 2\sqrt{11} + 5; & 5) \sqrt{6} - \sqrt{13}; & 6) \sqrt{5} - \sqrt{2}. \end{array}$$

4.192. Верно ли, что:

- 1) любое рациональное число является действительным;
- 2) любое действительное число является рациональным;
- 3) любое иррациональное число является действительным;
- 4) любое действительное число является иррациональным;
- 5) существует действительное число, не являющееся рациональным;
- 6) существует действительное число, не являющееся иррациональным;
- 7) существует рациональное число, не являющееся действительным;
- 8) существует целое число, не являющееся рациональным?

4.193. Верно ли, что число является рациональным:

- 1) $7\sqrt{3} + 5$;
- 2) $4\sqrt{5} - 13$;
- 3) $2\sqrt{5} + 3 - (\sqrt{2^2} + 2\sqrt{5})$;
- 4) $24 : (3\sqrt{16} + 12)$;
- 5) $48 : (6 - 2\sqrt{9})$;
- 6) $1 + 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} + 2)\sqrt{2}$?

4.194. Верно ли, что значение арифметического квадратного корня из положительного рационального числа:

- 1) всегда иррациональное число;
- 2) может быть рациональным числом;
- 3) всегда положительное число;
- 4) всегда действительное число?

4.195. Укажите (если возможно) два значения a , при которых меньший корень уравнения $x^2 = a$ является:

- 1) целым числом;
- 2) рациональным числом;
- 3) иррациональным числом;
- 4) натуральным числом;
- 5) нулем;
- 6) положительным числом.

4.196*. Верно ли, что если x и y — иррациональные числа, то иррациональным будет и число:

- 1) $x + y$; 2) $x - y$;
3) $x \cdot y$; 4) $x : y$?

Приведите два примера, иллюстрирующих ваш ответ.

4.197*. Может ли дробь $\frac{a}{b}$ быть рациональным числом, если:

- 1) a — рациональное число, b — иррациональное;
2) a — иррациональное число, b — рациональное;
3) a и b — рациональные числа;
4) a и b — иррациональные числа?

Если да, то приведите два примера, подтверждающих ваш ответ.

4.7. Числовые неравенства, содержащие квадратные корни



Напомним следствие из теоремы 2 п. 1.5: если $a < b$ и $a \geq 0, b \geq 0$, то $a^n < b^n$ при любом натуральном n .

Установим теперь несколько свойств для числовых неравенств, содержащих квадратные корни.

Теорема. При любых неотрицательных значениях a и b :

- 1) если $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, то $a < b$;
2) если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Доказательство. 1) Пусть $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Тогда по следствию из теоремы 2 п. 1.5 имеем $(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2$, т. е.

$$a < b.$$

2) Пусть $a < b$. Надо доказать, что $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Допустим противное, т. е. допустим, что неравенство $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ — неверное. Тогда либо $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, либо $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Если $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, то $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2$, т. е. $a = b$, что противоречит условию $a < b$.

Если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, т. е. $\sqrt{b} < \sqrt{a}$, то из уже доказанной нами части 1) этой теоремы следует, что $b < a$, а это опять противоречит условию.

Итак, если $a < b$, то $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. $\square$

Заметим, что эту теорему можно сформулировать так:



при неотрицательных a и b неравенства $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ и $a < b$ одновременно верны (или одновременно неверны); говорят также, что эти неравенства равносильны.

Пример 1. Сравнить числа 9,5 и $\sqrt{89}$.

Решение. Сравним квадраты чисел 9,5 и $\sqrt{89}$:

$$(9,5)^2 = 90,25; (\sqrt{89})^2 = 89.$$

Неравенство $90,25 > 89$ верное.

Значит, согласно теореме этого пункта неравенство $\sqrt{90,25} > \sqrt{89}$, т. е. $9,5 > \sqrt{89}$ тоже верное.

Ответ: $9,5 > \sqrt{89}$.

Пример 2. Доказать, что верно неравенство $2 < \sqrt{5} < 3$.

Доказательство. Поскольку $a = \sqrt{a^2}$ при $a > 0$, то неравенство $2 < \sqrt{5} < 3$ равносильно неравенству $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$. На основании теоремы этого пункта оно равносильно верному числовому неравенству $4 < 5 < 9$. Значит, неравенство $2 < \sqrt{5} < 3$ верное. $\square$

Пример 3. Доказать неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства и установим ее знак:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} =$$

↑ выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ имеют смысл, так как по условию $a \geq 0$ и $b \geq 0$ ↑

↓ по формуле квадрата разности получим ↓

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Следовательно, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. $\square$

Неравенство, доказанное в примере 3, можно прочитать так:



среднее арифметическое неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического.

Замечание. Если $a = b$, то $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = 0$, тогда $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0$, откуда $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$.

Таким образом, если $a = b$, то среднее арифметическое неотрицательных чисел a и b равно их среднему геометрическому.

Наоборот, если $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$, то

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} = 0.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, и, значит, $a = b$.

Итак, если среднее арифметическое двух неотрицательных чисел равно их среднему геометрическому, то эти числа равны.

▲ **Пример 4.** Решить неравенство:

а) $\sqrt{x} < 2,5$; б) $\sqrt{x} > 13$.

Решение. а) Выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при неотрицательных значениях x ; значит, $x \geq 0$. При этих значениях x обе части неравенства $\sqrt{x} < 2,5$ неотрицательны, и данное неравенство равносильно неравенству $(\sqrt{x})^2 < (2,5)^2$, т. е. $x < 6,25$.

Таким образом, $x \geq 0$ и $x < 6,25$, т. е. $0 \leq x < 6,25$.

б) Выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при неотрицательных значениях x ; следовательно, $x \geq 0$. При этих значениях x обе части неравенства $\sqrt{x} > 13$ неотрицательны, и данное неравенство равносильно неравенству $(\sqrt{x})^2 > 13^2$. Таким образом, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > 169, \end{cases}$$

откуда имеем $x > 169$.

Ответ: а) $[0; 6,25)$; б) $(169; +\infty)$.



Решение неравенства а) можно оформить и так:

$$\sqrt{x} < 2,5;$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ (\sqrt{x})^2 < (2,5)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x < 6,25; \end{cases}$$

$$0 \leq x < 6,25.$$

Ответ: $[0; 6,25)$. ▲



1. Сформулируйте и докажите теорему о равносильности неравенств $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ и $a < b$.
2. Как сравнить числа 7,5 и $\sqrt{50}$?
3. Даны два неотрицательных числа m и k . Назовите число, которое является для чисел m и k :
а) средним арифметическим; б) средним геометрическим.
4. Докажите, что среднее арифметическое неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического.

Упражнения

Сравните числа (4.198—4.201).

- 4.198°. 1) 8 и $\sqrt{63}$; 2) 4 и $\sqrt{17}$;
 3) $4\sqrt{5}$ и $9\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{18}$ и $4\sqrt{2}$;
 5) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{5}$.
- 4.199°. 1) $-4\sqrt{20}$ и $-3\sqrt{20}$; 2) $-5\sqrt{2}$ и $-4\sqrt{2}$;
 3) $5\sqrt{3}$ и $6\sqrt{2}$; 4) $3\sqrt{7}$ и $4\sqrt{5}$;
 5) $-8\sqrt{6}$ и $-6\sqrt{8}$; 6) $-3\sqrt{21}$ и $-4\sqrt{15}$.
- 4.200. 1) $\frac{1}{6}\sqrt{153}$ и $\frac{1}{4}\sqrt{272}$; 2) $\frac{3}{4}\sqrt{240}$ и $\frac{3}{5}\sqrt{375}$;
 3) $-\sqrt{627}$ и $-3\sqrt{325}$; 4) $-\frac{1}{3}\sqrt{189}$ и $-\frac{1}{2}\sqrt{208}$.
- 4.201. 1) $\frac{15}{\sqrt{5}}$ и $\frac{12}{\sqrt{6}}$; 2) $\frac{21}{2\sqrt{3}}$ и $\frac{14}{\sqrt{7}}$;
 3) $\frac{11}{2\sqrt{3}+1}$ и $\frac{19}{2\sqrt{5}-1}$;
 4) $(\sqrt{7}-2\sqrt{3})(\sqrt{7}+2\sqrt{3})$ и $(3+2\sqrt{7})^2$.

4.202°. Сравните с нулем число:

- 1) $\sqrt{20} - 4$; 2) $9 - \sqrt{39}$;
3) $\sqrt{104} - 11$; 4) $6 - \sqrt{87}$.

4.203°. Установите, между какими последовательными натуральными числами заключено число:

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{23}$;
5) $\sqrt{79}$; 6) $\sqrt{83}$; 7) $\sqrt{257}$; 8) $\sqrt{54}$.

4.204°. Запишите целые числа, заключенные между:

- 1) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{67}$; 2) $-\sqrt{42}$ и $-\sqrt{14}$;
3) $-\sqrt{2,83}$ и $\sqrt{3,69}$; 4) $\sqrt{0,27}$ и $\sqrt{29,18}$.

4.205°. Найдите наибольшее целое число, которое меньше числа:

- 1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{67}$; 3) $\sqrt{149}$;
4) $\sqrt{11}$; 5) $\sqrt{234}$; 6) $\sqrt{1149}$.

4.206°. Найдите наименьшее целое число, которое больше числа:

- 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{63}$;
4) $\sqrt{263}$; 5) $\sqrt{741}$; 6) $\sqrt{999}$.

Определите, верно ли соотношение (4.207—4.208).

- 4.207°. 1) $\sqrt{8,41} \geq 2,8$; 2) $\sqrt{14,44} = 3,8$;
3) $\sqrt{29,16} = 5,4$; 4) $\sqrt{7,29} \leq 2,7$;
5) $\sqrt{39,69} \geq 6$; 6) $\sqrt{50,41} \leq 7,2$;
7) $\sqrt{88,36} < 9,8$; 8) $\sqrt{86,49} > 9$.

- 4.208. 1) $5,8 < \sqrt{35} < 5,9$; 2) $6,7 < \sqrt{46} < 6,8$;
3) $14,6 < \sqrt{215} < 14,7$; 4) $20,6 < \sqrt{429} < 20,7$.

Расположите числа в порядке возрастания (4.209—4.210).

- 4.209. 1) $\sqrt{12}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{9,9}$; 2) $\sqrt{1,24}$; $\sqrt{1,02}$; $\sqrt{1,204}$;
3) $\sqrt{\frac{7}{8}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{11}{12}}$; 4) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{6}{7}}$; $\sqrt{\frac{5}{6}}$.

4.210. 1) $-\sqrt{32}$; $\sqrt{52}$; $-\sqrt{128}$; $\frac{2}{3}\sqrt{162}$; $\frac{4}{11}\sqrt{242}$;

2) $\frac{3}{8}\sqrt{432}$; $-\sqrt{75}$; $100\sqrt{48}$; $\frac{1}{7}\sqrt{147}$; $-\sqrt{27}$.

4.211°. Докажите неравенство:

1) $3 < \sqrt{10} < 4$; 2) $3 < \sqrt{15} < 4$;

3) $6 < \sqrt{42} < 7$; 4) $8 < \sqrt{75} < 9$.

4.212. Верно ли неравенство:

1) $\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} \leq \sqrt{17}$;

2) $\sqrt{26 - \sqrt{9 - \sqrt{64}}} < \sqrt{23}$;

3) $\sqrt{120 + \sqrt{6 - \sqrt{25}}} > \sqrt{124}$;

4) $\sqrt{39 - \sqrt{5 + \sqrt{16}}} \geq \sqrt{37}$?

4.213. Докажите, что для любых чисел, если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $\sqrt{a^3} > \sqrt{b^3}$.

4.214. Докажите, что если $p \geq 0$, то верно неравенство:

1) $\frac{3+p}{2} \geq \sqrt{3p}$; 2) $\frac{5+p}{2} \geq \sqrt{5p}$;

3) $7 + 2p \geq 2\sqrt{14p}$; 4) $3 + 7p \geq 2\sqrt{21p}$;

5) $11p + 3 - \sqrt{132p} \geq 0$; 6) $2 + 13p - \sqrt{104p} \geq 0$.

4.215. Докажите неравенство:

1) $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$ при $a > 0$, $b > 0$;

2) $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$ при $a > 0$, $b > 0$;

3) $\frac{a^2+9}{\sqrt{a^2+8}} > \sqrt{2a}$ при $a > 0$;

4) $\frac{a}{6} + \frac{1}{a} \geq 0,4$ при $a > 0$.

4.216*. Докажите, что при $k > 1$ верно неравенство:

1) $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$; 2) $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$.

Докажите неравенство (4.217—4.218).

4.217. 1) $1 + \sqrt{6} + \sqrt{27} > \sqrt{48}$; 2) $\sqrt{50} - \sqrt{32} < 1 + \sqrt{6}$.

4.218*. 1) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{20^2} < \frac{19}{20}$;

2) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{20^2} > \frac{19}{42}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}} > 1$;

4) $\frac{1}{\sqrt{17} + \sqrt{16}} + \frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{19} + \sqrt{18}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{30} + \sqrt{29}} < 2$.

Решите неравенство (4.219—4.230).

4.219*. 1) $\sqrt{x} > 2$;

2) $\sqrt{x} < 2$;

3) $\sqrt{x} > 0$;

4) $\sqrt{x} \leq 0$;

5) $\sqrt{x} \leq 0,9$;

6) $\sqrt{x} \geq 1,2$;

7) $\sqrt{x} > -0,3$;

8) $\sqrt{x} < -0,7$.

4.220*. 1) $\sqrt{x+4} < 7$;

2) $\sqrt{x-5} > 3$;

3) $\sqrt{x-1} \geq 1$;

4) $\sqrt{x+8} \leq 2$.

4.221*. 1) $\sqrt{2x-4} \leq 0$;

2) $\sqrt{6x+12} \geq 0$;

3) $\sqrt{5x+10} \geq 0$;

4) $\sqrt{3x-9} \leq 0$;

5) $\sqrt{4x-2} > -1$;

6) $\sqrt{6-2x} < -1$;

7) $\sqrt{9x+3} \leq -3$;

8) $\sqrt{25x+10} \geq -5$.

4.222*. 1) $\frac{1}{\sqrt{5x+4}} \geq 3$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6x-7}} < 2$;

3) $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{25-50x}} \leq 6$;

4) $\frac{\sqrt{113^2-112^2}}{\sqrt{27-36x}} \geq 4$.

4.223*. 1) $\sqrt{-x} \geq 0$;

2) $\sqrt{-x} \leq 0$;

3) $\sqrt{-x} > -1$;

4) $\sqrt{-x} < -2$;

5) $\sqrt{-x} \geq 2$;

6) $\sqrt{-x} < 4$.

4.224*. 1) $\sqrt{|x|} \geq 3$;

2) $\sqrt{|x|} \leq 2$;

3) $\sqrt{|3-x|} \leq 8$;

4) $\sqrt{|4-x|} > 4$;

5) $\sqrt{(6-x)^2} < 1$;

6) $\sqrt{(3-x)^2} > 5$.

4.225*. 1) $\sqrt{(x+3)^2} \leq 0$;

3) $\sqrt{(1-x)^2} > 0$;

2) $\sqrt{(x-4)^2} \geq 0$;

4) $\sqrt{(x+2)^2} < 0$.

4.226*. 1) $-\sqrt{(x-6)^2} \geq 0$;

3) $\sqrt{-(16+2x)^2} \leq 0$;

5) $-\sqrt{-(x-2)^2} \geq 0$;

2) $-\sqrt{(5-x)^2} \leq 0$;

4) $\sqrt{-(6-2x)^2} \geq 0$;

6) $-\sqrt{-(x+1)^2} \leq 0$.

4.227*. 1) $\sqrt{x^2+6x+9} \leq 0$;

3) $\sqrt{-49-x^2+14x} \leq 0$;

2) $\sqrt{x^2-10x+25} \geq 0$;

4) $\sqrt{8x-16-x^2} \geq 0$.

4.228*. 1) $-\sqrt{16x^2+8x\sqrt{2}+2} \geq 0$;

2) $-\sqrt{7-2\sqrt{7}x+x^2} \leq 0$;

3) $-\sqrt{-1+2\sqrt{6}x-6x^2} \leq 0$;

4) $-\sqrt{-5x^2+2\sqrt{15}x-3} \geq 0$.

4.229*. 1) $\sqrt{x^2+4-4x} > 6$;

3) $\sqrt{9x^2+1+6x} \leq 2$;

2) $\sqrt{x^2+9+6x} \geq 3$;

4) $\sqrt{4+25x^2-20x} < 6$.

4.230*. 1) $1 < \sqrt{x} < 2$;

3) $2 \leq \sqrt{x} < 4$;

5) $3 < \sqrt{x-3} \leq 5$;

2) $3 < \sqrt{x} < 4$;

4) $1 < \sqrt{x} \leq 5$;

6) $2 \leq \sqrt{x+1} < 3$.

Глава 5

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Квадратные уравнения. Частные случаи

Определение. *Квадратным уравнением* называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a , b и c — числа, $a \neq 0$, x — переменная (неизвестное).

Числа a , b и c называются *коэффициентами* квадратного уравнения. Число a — *старшим коэффициентом*, b — *средним коэффициентом*, c — *свободным членом*.

Квадратное уравнение называется еще *уравнением второй степени с одной переменной (с одним неизвестным)*.



Подчеркнем, что если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ квадратное, то $a \neq 0$.

Квадратное уравнение, в котором или коэффициент b , или свободный член c равен нулю, называется *неполным*. Неполные уравнения $ax^2 + c = 0$, $ax^2 + bx = 0$ и $ax^2 = 0$ — это частные случаи квадратного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $5x^2 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 5, получим равносильное ему уравнение $x^2 = 0$ с единственным корнем $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 2. Решить уравнение $4x^2 - 3 = 0$.

Решение. После преобразований получим уравнение $x^2 = \frac{3}{4}$, равносильное данному. Откуда

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ или } x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ можно записать и в такой форме: $x_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и в такой: $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (читается «плюс-минус корень из трех, деленный на два»).

Пример 3. Решить уравнение $4x^2 + 36 = 0$.

Решение. Значение выражения $4x^2 + 36$ положительно при любом значении x (поясните почему). Значит, уравнение $4x^2 + 36 = 0$ не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 4. Решить уравнение $4x^2 - 7x = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители: $x(4x - 7) = 0$. Откуда получим:

$$x = 0 \text{ или } 4x - 7 = 0.$$

Решив уравнение $4x - 7 = 0$, найдем $x = \frac{7}{4}$.

Ответ: 0; $\frac{7}{4}$.

▲ **Пример 5.** Решить уравнение

$$3x^2 - 5|x| = 0. \quad (1)$$

Решение. *Способ 1.* Заметим, что $x^2 = |x|^2$ при всех значениях x . Обозначим $|x| = t$ и подставим t в уравнение (1):

$$3t^2 - 5t = 0,$$

$$t(3t - 5) = 0,$$

$$t = 0 \text{ или } t = \frac{5}{3}.$$

Итак, $|x| = 0$ или $|x| = \frac{5}{3}$.

По определению модуля имеем:

$$x = 0 \text{ или } x = -\frac{5}{3} \text{ или } x = \frac{5}{3}.$$

Ответ: $-\frac{5}{3}$; 0; $\frac{5}{3}$.



Способ 2. По определению модуля уравнение (1) при $x \geq 0$ равносильно уравнению

$$3x^2 - 5x = 0, \quad (2)$$

а при $x < 0$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$3x^2 + 5x = 0. \quad (3)$$

Решив уравнение (2), получим

$$x = 0 \text{ или } x = \frac{5}{3},$$

причем оба значения удовлетворяют условию $x \geq 0$.

Решив уравнение (3), получим

$$x = 0 \text{ или } x = -\frac{5}{3},$$

причем условию $x < 0$ удовлетворяет только значение $x = -\frac{5}{3}$.

Объединив решения уравнений (2) и (3), получим все корни уравнения (1).



Это решение можно записать и так:

$$3x^2 - 5|x| = 0;$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 3x^2 - 5x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ 3x^2 + 5x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ (x = 0 \text{ или } x = \frac{5}{3}) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ (x = 0 \text{ или } x = -\frac{5}{3}); \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ или } x = \frac{5}{3} \text{ или } x = -\frac{5}{3}.$$

Ответ: $-\frac{5}{3}$; 0; $\frac{5}{3}$. ▲



1. Какое уравнение называется квадратным?
2. Как называют коэффициенты квадратного уравнения?
3. В каком случае квадратное уравнение называется неполным?
4. Приведите пример неполного квадратного уравнения, которое получается, если нулю равен:
 - а) только свободный член;
 - б) только средний коэффициент;
 - в) и свободный член, и средний коэффициент.

Упражнения

5.1°. Укажите старший и средний коэффициенты, а также свободный член в квадратном уравнении:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 1) $2x^2 + 6x - 8 = 0$; | 2) $5x^2 - 16x - 12 = 0$; |
| 3) $-21 + 3x^2 = 0$; | 4) $24 - 7x^2 = 0$; |
| 5) $-x - x^2 = 0$; | 6) $x^2 + x = 0$; |
| 7) $3 - x^2 - 4x = 0$; | 8) $-9 + x + x^2 = 0$; |
| 9) $31x^2 = 0$; | 10) $-16x^2 = 0$; |
| 11) $4x^2 + 18x = 0$; | 12) $12x^2 - 1,3x = 0$. |

5.2°. Представьте уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$ при $a > 0$ и укажите старший и средний коэффициенты, а также свободный член:

1) $8x^2 + 3x(5x - 1) = 6$;

2) $13x^2 = 8 - 4x(2x - 1)$;

3) $x - 3 = 4(2 - 3x)^2 + (5x + 7)(7 - 5x)$;

4) $5 - 3x - (4x - 1)^2 = 8(x - 4)^2$;

5) $x^3 - 1 + (x - 1)(x + 2) = x^2(x - 2)$;

6) $(2x - 3)^2 x - 4x^2(x + 3) = 9$.

5.3°. Какие из чисел -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 являются корнями уравнения:

1) $x^2 - 1 = 0$;

2) $x^2 + x - 6 = 0$;

3) $x^2 - 5x + 4 = 0$;

4) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

5) $\frac{(x^2 - 9)(x + 1)}{x^2 - 1} = 0$;

6) $\frac{(x^3 - 1)(x^4 - 16)}{x^2 - 4x + 4} = 0$?

Решите уравнение (5.4—5.17).

5.4°. 1) $0,01x^2 = 4$;

2) $4x^2 = 0,16$;

3) $16x^2 + 9 = 0$;

4) $2x^2 + 21 = 3$;

5) $-3x^2 + 5^0 = 1$;

6) $26^0 - x^2 = 1$.

5.5°. 1) $x^2 - 100 = 0$;

2) $x^2 - 225 = 0$;

3) $x^2 - 5 = 20$;

4) $x^2 + 10 = 59$;

5) $x^2 + 13 = 4$;

6) $x^2 + 36 = 11$.

5.6°. 1) $x^2 = 2\frac{7}{9}$;

2) $x^2 = 1\frac{9}{16}$;

3) $2x^2 = 32$;

4) $5x^2 = 20$;

5) $7x^2 = 1575$;

6) $11x^2 = 704$.

5.7°. 1) $x^2 = 3$;

2) $6x^2 = 5$;

3) $19x^2 = 12\frac{2}{3}$;

4) $7x^2 = 14$;

5) $4x^2 = 8 - x^2$;

6) $32 + 3x^2 = 8x^2$.

5.8. 1)° $(x + 2)^2 = 0$;

2)° $(x - 3)^2 = 0$;

3) $25x^2 - 30x + 9 = 0$;

4) $49 + 140x + 100x^2 = 0$;

5) $36 + 4x^2 - 24x = 0$;

6) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

- 5.9°.** 1) $x^2 - x = 0$; 2) $x^2 + x = 0$;
3) $x^2 + 2x = 0$; 4) $x^2 - 5x = 0$;
5) $6x^2 - 8x = 0$; 6) $9x^2 - 14x = 0$;
7) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$; 8) $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$;
9) $\frac{1}{7}x + 49x^2 = 0$; 10) $\frac{1}{5}x + 25x^2 = 0$.
- 5.10°.** 1) $4x^2 = -9x$; 2) $-12x^2 = 5x$; 3) $\frac{x^2}{5} + x = 0$;
4) $-\frac{3x}{2} - x^2 = 0$; 5) $x^2 + \frac{x}{2} = 0$; 6) $\frac{x^2}{2} - 3x = 0$.
- 5.11°.** 1) $8x^2 - 25x = 3x^2 + 6x$; 2) $29x^2 - 12x = 25x^2 + 9x$;
3) $8x + 6x^2 = 4x^2 + 5x$; 4) $21x - 3x^2 = 4x^2 + 2x$;
5) $11x^2 - 4x = 5x^2 + 8x$; 6) $3x^2 + 18x = 14x - 7x^2$;
7) $5,5x - x^2 = 2,5x + 6x^2$; 8) $9,2x - 7x^2 = 2,7x + 3x^2$.
- 5.12.** 1) $(y - 4)(y + 3) = -12$; 2) $(y + 7)(y - 5) = -35$;
3) $(2 - x)(5 - x) = 10$; 4) $(x + 6)(8 - x) = 48$;
5) $(4x - 1)^2 - 1 = 0$; 6) $(9x + 8)^2 - 64 = 0$;
7) $(7 - 2y)^2 + 28y = 0$; 8) $(5 + 3y)^2 - 30y = 0$.
- 5.13.** 1) $3(29 - 5x) = x(x - 5) - 10x$;
2) $24 - x(3x + 4) = 2(15 - 2x) - 63$;
3) $(2x + 5)^2 = 16 + (x - 3)^2$;
4) $(x - 1)^2 = 17 - (3x + 4)^2$;
5) $(4x - 1)^2 - (5x + 2)^2 + (8x - 7)(8x + 7) = 28(6 - x)$;
6) $(2x - 7)^2 + (3x - 5)^2 - 2(64 - 29x) = (4x - 9)(9 + 4x)$.
- 5.14.** 1) $\frac{9y^2 - 2y}{3} = \frac{y^2 + 5y}{4}$; 2) $\frac{4y^2 + 7y}{5} = \frac{3y^2 - 2y}{2}$;
3) $\frac{4y^2 - 9}{5} + 3\frac{13}{30} = \frac{5y^2 + 9}{6}$; 4) $\frac{8y^2 - 3}{5} - 32,8 = \frac{5 - 9y^2}{4}$;
5) $\frac{74 - 2y^2}{12} - 10 = \frac{11 - 3y^2}{8}$; 6) $\frac{20 - 3y^2}{18} + 3\frac{5}{9} = \frac{13y^2 - 4}{12}$.

5.15. 1) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{x^2-1}{8} = \frac{x^2-3}{4} + \frac{x^2-4}{3}$;
2) $\frac{x^2+6}{2} + \frac{5-4x^2}{3} - \frac{8-x^2}{6} = 0$;
3) $x^2 - \frac{x^2-1}{3} - \frac{2x^2-5}{5} + \frac{x^2+8}{6} = 7$;
4) $2x^2 + \frac{3x^2-1}{2} - \frac{5x^2-2}{3} = 2$.

5.16. 1) $x^2 - 6|x| = 0$; 2) $4x^2 + 5|x| = 0$;
3) $3x^2 - 4|x| = 0$; 4) $8x^2 - 3|x| = 0$.

5.17*. 1) $8x^2 + \frac{x}{|x|} = 0$; 2) $x^2 - \frac{9x}{|x|} = 0$;
3) $x^2 - \frac{8x^2}{|x|} = 0$; 4) $7x^2 + \frac{x}{7|x|} = 0$.

5.18. 1) При каких значениях p уравнение $x^2 + p = 0$:

- а) имеет два корня;
- б) имеет единственный корень;
- в) не имеет корней?

2) При каких значениях t уравнение $t - x^2 = 0$:

- а) имеет два корня;
- б) имеет единственный корень;
- в) не имеет корней?

Решите уравнение относительно x (5.19—5.21).

5.19*. 1) $x^2 - p^2 = 0$; 2) $3x^2 - p = 0$;
3) $2x^2 + k = 0$; 4) $x^2 + k^2 = 0$;
5) $cx^2 - \frac{1}{k} = 0$; 6) $cx^2 - \frac{k^2}{c} = 0$.

5.20*. 1) $x^2 - 9p^2 - 30p - 25 = 0$;
2) $k^2 - 6k + 9 - x^2 = 0$;
3) $x^2 - 25 + 10m - m^2 = 0$;
4) $x^2 - 4t^2 - 12t - 9 = 0$;
5) $100 + 60c^2 + 9c^4 - x^2 = 0$;
6) $x^2 - 25a^4 + 10a^2 - 1 = 0$.

5.21*. 1) $\frac{2x^2}{t} = \frac{t}{2}$; 2) $\frac{mx^2}{6} = \frac{6}{m}$;
3) $\frac{k^2}{4} = \frac{8x^2}{k^2}$; 4) $\frac{5x^2}{k^3} = \frac{k}{15}$;
5) $\frac{1+c}{c-1} \cdot x^2 + 1 = c^2$; 6) $\frac{2-k}{2+k} \cdot x^2 - 4 = -k^2$.

5.2. Метод выделения полного квадрата

В предыдущем пункте мы решали неполные квадратные уравнения. Рассмотрим теперь несколько уравнений, все коэффициенты которых отличны от нуля.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Решение. Рассмотрим выражение $x^2 + 14x$. Если мы прибавим к нему число 49, то дополним это выражение до квадрата двучлена:

$$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2.$$

Воспользовавшись этими рассуждениями, преобразуем левую часть исходного квадратного уравнения:

$$x^2 + 14x + 24 = (x^2 + 14x + 49) - 49 + 24 = (x + 7)^2 - 25.$$

Теперь исходное уравнение можно записать в виде

$$(x + 7)^2 - 25 = 0.$$

Оно равносильно уравнению

$$(x + 7)^2 = 25.$$

Отсюда имеем

$$x + 7 = -5 \text{ или } x + 7 = 5.$$

Решив каждое из этих уравнений, получим

$$x_1 = -12; x_2 = -2.$$

Ответ: $-12; -2$.

Метод, который мы применили для решения этого квадратного уравнения, называется **методом выделения полного квадрата**. Поясним его еще на нескольких примерах.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 10x + 7 = 0$.

Решение. Выделим в левой части уравнения полный квадрат:

$$x^2 - 10x + 7 = (x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2) - 5^2 + 7 = (x - 5)^2 - 18.$$

Таким образом, исходное уравнение можно записать в виде

$$(x - 5)^2 - 18 = 0.$$

Оно равносильно уравнению

$$(x - 5)^2 = 18.$$

Откуда

$$x - 5 = -\sqrt{18} \text{ или } x - 5 = \sqrt{18}.$$

Решив каждое из этих уравнений, получим:

$$x_1 = 5 - 3\sqrt{2}; \quad x_2 = 5 + 3\sqrt{2}.$$

Ответ: $5 - 3\sqrt{2}$; $5 + 3\sqrt{2}$.

В квадратных уравнениях, рассмотренных в примерах 1 и 2, старший коэффициент был равен 1.

Квадратное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1, называется **приведенным**.

Таким образом, приведенное квадратное уравнение — это уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0.$$

Для каждого квадратного уравнения можно записать равносильное ему приведенное уравнение, разделив обе части квадратного уравнения на старший коэффициент.

Например, разделив на 5 уравнение

$$5x^2 + 3x - 2 = 0,$$

получим равносильное ему приведенное уравнение

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0.$$

Пример 3. Решить уравнение $5x^2 + 3x - 2 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 5, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0.$$

Выделим в его левой части полный квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} &= \left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot x + \left(\frac{3}{10} \right)^2 \right) - \left(\frac{3}{10} \right)^2 - \frac{2}{5} = \\ &= \left(x + \frac{3}{10} \right)^2 - \frac{49}{100}. \end{aligned}$$

Решим равносильное данному уравнение:

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} = 0;$$

$$\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{49}{100};$$

$$x + \frac{3}{10} = \frac{-7}{10} \text{ или } x + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Решив каждое из этих уравнений, получим:

$$x = -1 \text{ или } x = \frac{2}{5}.$$

Ответ: $-1; \frac{2}{5}$.

Пример 4. Решить уравнение $4x^2 + 28x + 49 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 4, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + 7x + 12,25 = 0.$$

Выделим в его левой части полный квадрат:

$$x^2 + 7x + 12,25 = x^2 + 2 \cdot 3,5 \cdot x + 3,5^2 = (x + 3,5)^2.$$

Таким образом, имеем $(x + 3,5)^2 = 0$, откуда

$$x + 3,5 = 0, \text{ т. е. } x = -3,5.$$

Ответ: $-3,5$.

Пример 5. Решить уравнение $3x^2 - 7x + 6 = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на 3, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = 0.$$

Выделим полный квадрат в левой части полученного уравнения:

$$x^2 - \frac{7}{3}x + 2 = \left(x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6} \cdot x + \left(\frac{7}{6}\right)^2\right) - \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 2 = \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} = 0.$$

При любом значении x значение выражения, стоящего в левой части этого уравнения, положительно (поясните почему), значит, уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.



1. Какое квадратное уравнение называется приведенным?
2. Как из квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ получить равносильное ему приведенное уравнение?
3. Как выделить полный квадрат в левой части приведенного квадратного уравнения:
 - а) $x^2 - 10x + 7 = 0$;
 - б)* $x^2 + 2tx + m = 0$;
 - в)* $x^2 + px + m = 0$?

Упражнения

5.22°. Замените многочотие числом так, чтобы получился квадрат двучлена:

- | | |
|--|--|
| 1) $x^2 + 2x \cdot 5 + \dots$; | 2) $x^2 - 2x \cdot 7 + \dots$; |
| 3) $x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \dots$; | 4) $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \dots$; |
| 5) $x^2 + 7x + \dots$; | 6) $x^2 - 9x + \dots$. |

5.23°. Найдите такое значение p , при котором данное выражение будет квадратом двучлена:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $x^2 + 6x + p$; | 2) $x^2 - 4x + p$; |
| 3) $x^2 - 5x - 6\frac{1}{2} + p$; | 4) $x^2 + 7x + 9\frac{1}{4} + p$; |
| 5) $x^2 + px + \frac{1}{16}$; | 6) $x^2 - px + \frac{1}{121}$. |

5.24. Выделите полный квадрат:

- | | |
|---|---|
| 1) $2x^2 + 18x - 10$; | 2) $3x^2 - 18x + 15$; |
| 3) $5x^2 + 35x + 30$; | 4) $4x^2 - 32x + 60$; |
| 5) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2} - 3$; | 6) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 45$. |

Решите уравнение (5.25—5.27).

- | | |
|---------------------------------|---------------------------|
| 5.25°. 1) $x^2 - 8x - 9 = 0$; | 2) $x^2 - 5x - 6 = 0$; |
| 3) $x^2 - 2x - 15 = 0$; | 4) $x^2 + 3x - 10 = 0$; |
| 5) $x^2 - 4x + 3 = 0$; | 6) $x^2 + 9x + 14 = 0$; |
| 7) $x^2 - 6x + 8 = 0$; | 8) $x^2 + 4x - 21 = 0$. |
| 5.26. 1) $2x^2 - 9x + 10 = 0$; | 2) $5x^2 + 3x - 8 = 0$; |
| 3) $5x^2 + 14x - 3 = 0$; | 4) $8x^2 - 14x + 5 = 0$; |

- 5) $5x^2 + 3x - 2 = 0$; 6) $5x^2 - 4x - 12 = 0$;
7) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; 8) $4x^2 - 3x - 22 = 0$.
- 5.27. 1) $(x - 4)^2 - 49 = 0$; 2) $(x - 6)^2 - 25 = 0$;
3) $(5x + 1)^2 - 121 = 0$; 4) $(6x - 1)^2 - 225 = 0$;
5) $(x - 0,25)^2 - 1,44 = 0$; 6) $(x + 0,26)^2 - 0,0625 = 0$.
- 5.28. 1) При каких значениях x трехчлен $x^2 + 14x + 24$ принимает значение, равное:
а) 0; б) 24; в) -100?
2) При каких значениях x трехчлен $x^2 - x - 20$ принимает значение, равное:
а) 0; б) 36; в) -100 500?
- 5.29. 1) При каких значениях x трехчлен $x^2 + x - 30$ и двучлен $12x - 60$ принимают равные значения?
2) При каких значениях x трехчлен $x^2 - 11x + 30$ и двучлен $-4x - 18$ принимают равные значения?
- 5.30. 1) При каких значениях p значения двучленов $p^2 + 6p$ и $3p^2 - p$ равны?
2) При каких значениях k значения трехчленов $k^2 - k + 5$ и $2k^2 - 5k + 9$ равны?
- 5.31. Докажите неравенство, используя метод выделения полного квадрата:
1) $a^2 + 26a + 170 > 0$; 2) $4a^2 - 40a + 101 > 0$;
3) $-a^2 + a - 11 < 0$; 4) $-a^2 - 10a - 26 < 0$.
- 5.32. Докажите, что при любом значении x трехчлен принимает положительные значения:
1) $2x^2 + 12x + 24$; 2) $6x^2 - 13x + 16$.
- 5.33. Докажите, что при любом значении x трехчлен принимает отрицательные значения:
1) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$; 2) $-\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - 3$.
- 5.34*. При каком значении x трехчлен принимает наибольшее значение:
1) $-x^2 + 10x - 27$; 2) $-x^2 + 5x - 3$?

5.35*. При каком значении x трехчлен принимает наименьшее значение:

1) $10x^2 + 5x - 5$; 2) $9x^2 - 9x + 2$?

5.3. Формула корней квадратного уравнения

В предыдущем пункте для решения квадратных уравнений применялся метод выделения полного квадрата. Сейчас мы используем этот метод для решения квадратного уравнения в общем виде. А именно, решим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Разделив обе части этого уравнения на старший коэффициент $a \neq 0$, получим уравнение, равносильное уравнению (1):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Выделим в левой части этого уравнения полный квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1) равносильно уравнению

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом квадратного уравнения** (1). Дискриминант обозначается буквой D :

$$D = b^2 - 4ac.$$

Возможны три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

Случай 1. $D = b^2 - 4ac > 0$.

В этом случае выражение $\sqrt{b^2 - 4ac}$ имеет смысл, и уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

Откуда получаем

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{или} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Значит, уравнение (1) при $D > 0$ имеет два корня, которые находят по формулам:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Обычно эти формулы объединяют в одну, записывая ее следующим образом:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Используя обозначение дискриминанта буквой D , эту формулу записывают так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (3)$$

Случай 2. $D = b^2 - 4ac = 0$.

В этом случае уравнение (2) имеет вид

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Откуда $x + \frac{b}{2a} = 0$, и, значит, $x = -\frac{b}{2a}$.

Таким образом, уравнение (1) при $D = 0$ имеет единственный корень, который находят по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.

Случай 3. $D = b^2 - 4ac < 0$.

В этом случае в уравнении (2) правая часть отрицательна. Левая часть является квадратом двучлена и ни при каком значении переменной x не может принимать отрицательных значений. Значит, уравнение (2) при $D < 0$ не имеет корней. Следовательно, уравнение (1) при $D < 0$ не имеет корней.



▲ Те же результаты можно получить, действуя несколько иначе. Умножив обе части уравнения (1) на $4a$ ($a \neq 0$), получим равносильное ему уравнение:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Выделим в левой части полученного уравнения полный квадрат двучлена

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0.$$

Решим уравнение

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

которое равносильно уравнению (1).

Если $b^2 - 4ac = D > 0$, то имеем:

$$|2ax + b| = \sqrt{D},$$

откуда получим:

$$2ax + b = -\sqrt{D} \quad \text{или} \quad 2ax + b = \sqrt{D};$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{или} \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Итак, получили $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, т. е. формулу (3).

Очевидно, что при $b^2 - 4ac = 0$ получим корень $x = -\frac{b}{2a}$, а при $b^2 - 4ac < 0$ уравнение $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, равносильное уравнению (1), корней не имеет.

Рассмотрим теперь уравнение (1), когда средний коэффициент четный, т. е. когда $b = 2k$:

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

В этом случае формула (3) примет вид

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a};$$

после сокращения дроби на 2 получим

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Заметим, что $k = \frac{b}{2}$. Поэтому формулу (3) можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{D}{4},$$

то эту формулу записывают еще и так:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}. \quad (4)$$

Если средний коэффициент b квадратного уравнения (1) является четным числом, то вычисления по формуле (4) выполнять удобнее, чем по формуле (3). ▲

А

Впервые название «квадратное уравнение» было применено Вольфом (1710 г., Германия) и быстро распространилось по Европе в течение XVIII в.

Квадратные уравнения умели решать еще в Древнем Вавилоне во II тысячелетии до н. э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически.

Формула корней квадратного уравнения открывалась неоднократно. В работах европейских математиков создавались отдельные методы для решения различных видов квадратных уравнений. Слияние этих методов в общее правило произвел Штифель (1544 г., Германия). Он дал «рецепт» решения (без доказательства и без объяснений) для всех видов квадратных уравнений с действительными корнями. Привычное для нас обозначение корней x_1 и x_2 ввел Лагранж (1798 г., Франция). Слово «дискриминант» происходит от латинского слова *discriminans* — различающий, разделяющий.

Пример 1. Решить уравнение

$$3x^2 - 14x - 5 = 0. \quad (5)$$

Решение. *Способ 1.* Решим уравнение (5), используя формулу (3):

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = \\ &= 7^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 4(49 + 15) = 4 \cdot 64 = 16^2; \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 \pm 16}{6};$$

$$x_1 = \frac{14 - 16}{6} = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{14 + 16}{6} = 5.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$; 5.



▲ *Способ 2.* Поскольку $b = -14$ — четное число, то решим уравнение (5), используя формулу (4):

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot (-5) = 49 + 15 = 64 = 8^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{7 \pm 8}{3};$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = 5.$$

Заметим, что для решения уравнения (5) вычисления по формуле (4) оказались проще. ▲

Пример 2. Решить уравнение:

а) $2x^2 - x + 3 = 0$; б) $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Решение. а) $2x^2 - x + 3 = 0$;

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0, \text{ значит, корней нет.}$$

б) *Способ 1.* $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

$$D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 12^2 - (4 \cdot 3)^2 = 0;$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: а) корней нет; б) $\frac{2}{3}$.



▲ *Способ 2.* $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 36 - 9 \cdot 4 = 0;$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$.

Решение. $\sqrt{3}x^2 - 5x - \sqrt{12} = 0$.

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{12}) = \\ &= 25 + 4 \cdot \sqrt{36} = 25 + 24 = 49 = 7^2; \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 7}{2\sqrt{3}};$$

$$x_1 = \frac{5-7}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3};$$

$$x_2 = \frac{5+7}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{-\sqrt{3}}{3}$; $2\sqrt{3}$.



1°. Почему равносильны уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ и } x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0?$$

2. Почему равносильны уравнения

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0 \text{ и } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0?$$

3. Какое выражение называется дискриминантом квадратного уравнения?

4. В каком случае уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

- а) имеет два корня;
- б) имеет единственный корень;
- в) не имеет корней?

5. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ запишите формулу корней. Объясните, как ее получить.

6*. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ запишите формулу корней в случае, когда средний коэффициент b — четное число. Объясните, как ее получить.

Упражнения

5.36°. Какие из уравнений не имеют корней:

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 10x + 21 = 0$; | 2) $x^2 + 2x + 2 = 0$; |
| 3) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; | 4) $3x^2 - 7x - 8 = 0$; |
| 5) $4x^2 + 4x + 8 = 0$; | 6) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; |
| 7) $4x^2 + 7x + 5 = 0$; | 8) $3x^2 - 7x + 6 = 0$? |

5.37°. Какие из уравнений имеют два корня:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $9x^2 - 6x - 5 = 0$; | 2) $3x^2 - 5x + 4 = 0$; |
| 3) $6x^2 + 13x + 6 = 0$; | 4) $4x^2 - 20x + 25 = 0$; |
| 5) $9x^2 + 12x + 4 = 0$; | 6) $7x^2 + 8x + 15 = 0$; |
| 7) $7x^2 - 6x + 2 = 0$; | 8) $5x^2 + 7x - 8 = 0$? |

5.38°. Какие из уравнений имеют единственный корень:

1) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

2) $x^2 - 3x + 4 = 0$;

3) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

4) $16x^2 - 24x + 9 = 0$;

5) $25x^2 + 1 - 10x = 0$;

6) $9x^2 + 25 + 30x = 0$;

7) $49x^2 + 25 + 70x = 0$;

8) $4x^2 + 9 - 12x = 0$?

Решите уравнение (5.39—5.46).

5.39°. 1) $2x^2 + x - 10 = 0$;

2) $3x^2 + x - 4 = 0$;

3) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;

4) $5x^2 - 9x - 2 = 0$;

5) $-2x^2 + 15x - 7 = 0$;

6) $-3x^2 + 16x - 5 = 0$;

7) $-16x^2 + 16x - 4 = 0$;

8) $-4x^2 - 20x - 25 = 0$.

5.40°. 1) $y^2 - 3y - 5 = 0$;

2) $y^2 - 3y - 15 = 0$;

3) $2y^2 + y - 2 = 0$;

4) $3y^2 - y - 3 = 0$;

5) $-y^2 + 2,4y + 13 = 0$;

6) $-y^2 + 5,6y - 6,4 = 0$;

7) $-2y^2 - 0,1y + 0,06 = 0$;

8) $-3y^2 + 0,2y + 0,01 = 0$.

5.41°. 1) $\frac{1}{4}y^2 - 3y + 5 = 0$;

2) $\frac{1}{9}y^2 + 2y - 7 = 0$;

3) $2y^2 + \frac{2}{3}y - \frac{1}{6} = 0$;

4) $3y^2 - 1\frac{1}{2}y + \frac{1}{6} = 0$;

5) $y^2 + 2\frac{1}{2}y + 1 = 0$;

6) $y^2 + 3\frac{5}{12}y + 2 = 0$;

7) $-y^2 + 4\frac{1}{2}y - 4\frac{1}{2} = 0$;

8) $-y^2 + 1\frac{2}{3}y + 26 = 0$.

5.42°. 1) $5x = 1 - 6x^2$;

2) $1 = 6x - 5x^2$;

3) $9x + 2 = 5x^2$;

4) $y^2 + 576 = 52y$;

5) $5x - 14 = -x^2$;

6) $15y^2 - 7 = 22y + 30$;

7) $6x - 9 = x^2$;

8) $25y^2 + 1 = 10y$.

5.43°. 1) $x^2 - 25 = x - 5$;

2) $500 - 101y^2 = 100y + 299y^2$;

3) $26x^2 + 13x = 27x^2 + 25 - 13x$;

4) $5y^2 - 20y = 20y + 84 + 4y^2$;

5) $4y^2 + 8y + 40 = 5y^2 - 3y + 68;$

6) $25y^2 - 6y - 2 = 10y^2 + 7y + 94.$

5.44. 1) $x(x + 2) = 3;$

2) $x(x - 2) = 15;$

3) $2x(x - 8) = -x - 18;$

4) $3x(x - 5) = 4 - 4x;$

5) $x^2 - 16x - 1 = 5x(x - 4);$

6) $x^2 + 5x + 42 = x(2x + 6).$

5.45. 1) $(x - 1)(x + 3) = x - 5;$

2) $(x + 1)(x - 2) = x - 4;$

3) $(x + 2)(3x - 1) = 20;$

4) $(4x - 3)(4 - x) = 3;$

5) $(2y - 3)(5y + 1) = 2y + \frac{2}{5};$

6) $(y - 1)(1 + y) = 2\left(5y - 2\frac{1}{9}\right);$

7) $-y(7 + y) = (y - 2)(2 + y);$

8) $4(3 + y)(3y - 1) = (4 - 5y)y.$

5.46. 1) $(x + 4)^2 = 3x + 436;$

2) $(2x - 3)^2 = 11x - 19;$

3) $(10x - 4)^2 = (3x + 4)^2;$

4) $(1 + x)^2 = (1 - 2x)^2;$

5) $(2x - 3)^2 - 77 = (x + 5)^2;$

6) $(3x - 2)^2 = 48 + (2 - x)^2.$

5.47°. 1) При каких значениях p трехчлен $p^2 + 14p + 10$ принимает значение, равное -14 ?2) При каких значениях k трехчлен $2k^2 + 5k + 5$ принимает значение, равное 3 ?3) При каких значениях t трехчлен $5t^2 + 2t + 16$ принимает значение, равное 10 ?4) При каких значениях m трехчлен $42m^2 + 5m + 24$ принимает значение, равное 26 ?5.48. 1) При каких значениях a многочлены $a^2 - 22a + 25$ и $2a^2 - 20a + 1$ принимают равные значения?2) При каких значениях b многочлены $2 - 8b + 3b^2$ и $-4 + 2b^2 - 3b$ принимают равные значения?

3) При каких значениях c выражения $(3 - c)(4 - c)$ и $2c^2 - 20c + 48$ принимают равные значения?

4) При каких значениях d выражения $(2d + 1)(d + 2)$ и $3d^2 - 4$ принимают равные значения?

5.49°. При каких значениях k верно равенство:

1) $0,2k^2 + 125 = 10k$;

2) $4k^2 = 7k + 7,5$;

3) $k^2 + 1,2 = 2,6k$;

4) $-7 = 0,4k - 0,2k^2$;

5) $\frac{1}{7}k^2 = 2k - 7$;

6) $9 - 2k = \frac{1}{3}k^2$?

Решите уравнение (5.50—5.54).

5.50. 1) $y^2 - 4\sqrt{2}y + 4 = 0$;

2) $y^2 - y - \sqrt{6} = 0$;

3) $-y^2 + (2 + \sqrt{3})y - 2\sqrt{3} = 0$;

4) $-y^2 - (1 + \sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$;

5) $(2 + \sqrt{3})y^2 - (2\sqrt{3} + 1)y + \sqrt{3} - 1 = 0$;

6) $(\sqrt{3} - 2)y^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})y + 2 = 0$.

5.51*. 1) $3x^2 + 12x + 13 = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 + 12(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 13$;

2) $4x^2 - 4x - 15 = 4(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - 4(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 15$;

3) $2x^2 + 18x - 65 = 2(5\sqrt{2} + 4)^2 + 18(5\sqrt{2} + 4) - 65$;

4) $6x^2 + 5x - 6 = 6(3\sqrt{7} - 2)^2 + 5(3\sqrt{7} - 2) - 6$.

5.52*. 1) $x^2 + 6x = x^3$;

2) $6x^3 + x = 7x^2$;

3) $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$;

4) $x^4 - 29x^3 + 100x^2 = 0$.

5.53*. 1) $(x + 1)(2x + 3) = (x + 1)(x^2 - 5)$;

2) $(3 - x)(6x^2 + 12) = (3 - x)(x^2 - 4x)$;

3) $3x^2(5 - 10x) - 13x(5 - 10x) + 4(5 - 10x) = 0$;

4) $5x^2(x - 0,2) - 13x(x - 0,2) + 6(x - 0,2) = 0$.

5.54. 1) $4x(x - 1) + x(x + 2) = 3(2x - 1)$;

2) $2(x^2 - 1) = 3 - x(2x + 1)$;

3) $x(x - 10) - x(1,2x - 1) + 2,718 = 0$;

4) $(0,5x - 1,5)(x - 7) - 18,2x = (0,4x - 3,48) - \left(1\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)^2$.

5.55. Найдите корни уравнения:

1) $x^2 + x + \sqrt{7} - 7 = 0$, удовлетворяющие условию $x < \sqrt{7}$;

2) $x^2 - (6 - \sqrt{2})x + 8 - 2\sqrt{2} = 0$, удовлетворяющие условию $x > \sqrt{5}$.

5.56. 1) Сравните меньший корень уравнения $x^2 - 5x - 60 = 0$ с большим корнем уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$.

2) Сравните больший корень уравнения $x^2 + 6x + 7 = 0$ с меньшим корнем уравнения $x^2 + 8x - 9 = 0$.

Укажите значения p , при которых уравнение имеет два корня (5.57—5.58).

5.57. 1) $x^2 - 2x + p = 0$;

2) $x^2 + 16x + p = 0$;

3) $x^2 + x + p = 0$;

4) $x^2 + 7x + p = 0$;

5) $x^2 + 10x - p = 0$;

6) $x^2 + 17x - p = 0$.

5.58. 1) $2x^2 - 6x + p + 7 = 0$;

2) $2x^2 + 5x + p + 3 = 0$;

3) $3x^2 + 8x + 2p - 1 = 0$;

4) $4x^2 - 10x + 2p + 1 = 0$;

5) $6x^2 - 31x + 3p - 4 = 0$;

6) $5x^2 + 44x + 4p - 1 = 0$.

5.59. При каких значениях t уравнение имеет единственный корень:

1) $x^2 + 12x + t = 0$;

2) $9x^2 + 6x + t = 0$;

3) $4x^2 + tx + 49 = 0$;

4) $16x^2 - tx + 25 = 0$;

5)* $(2 + t)x^2 + 4tx + 4t + 1 = 0$;

6)* $(t - 1)x^2 + 2(t + 1)x + t - 2 = 0$?

Решите уравнение относительно x (5.60—5.61).

5.60*. 1) $x^2 + 5ax - 6a^2 = 0$;

2) $2x^2 + 3ax + a^2 = 0$;

3) $6x^2 - 5cx + c^2 = 0$;

4) $x^2 + 3cx + 2,25c^2 = 0$.

- 5.61*. 1) $x^2 - (5k - 3)x - 15k = 0$;
 2) $x^2 + (2k - 3)x - 6k = 0$;
 3) $x^2 - (3k - 2)x + 2k^2 - k - 3 = 0$;
 4) $x^2 - 4kx + 3k^2 - 4k - 4 = 0$.

5.4. Использование квадратных уравнений при решении задач

Рассмотрим примеры решения нескольких задач.

Пример 1. Сумма двух чисел равна 26, а их произведение равно 168. Найти эти числа.

Решение. Пусть одно из чисел x , тогда $(26 - x)$ — другое число. Так как произведение чисел x и $(26 - x)$ по условию равно 168, то имеем уравнение $x(26 - x) = 168$.

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} 26x - x^2 &= 168; \\ x^2 - 26x + 168 &= 0; \\ D &= 26^2 - 4 \cdot 168 = 4(13^2 - 168) = 4 = 2^2; \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{26 \pm 2}{2} = 13 \pm 1; \\ x &= 12 \text{ или } x = 14. \end{aligned}$$

Если одно из чисел $x = 12$, то другое число $26 - 12 = 14$.

Если одно из чисел $x = 14$, то другое число $26 - 14 = 12$.

Ответ: 12 и 14.



▲ Если воспользоваться формулой (4) п. 5.3, то уравнение $x^2 - 26x + 168 = 0$ решается проще:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 13^2 - 168 = 169 - 168 = 1; \\ x_{1,2} &= \frac{13 \pm 1}{1}; \\ x_1 &= 12; x_2 = 14. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Пример 2. Одну сторону квадрата уменьшили на 6 см, а смежную сторону увеличили на 2 см и построили прямо-

угольник. Площадь полученного прямоугольника равна 33 см^2 . Найти стороны прямоугольника.

Решение. Пусть x см — длина стороны квадрата, тогда $(x - 6)$ см и $(x + 2)$ см — длины сторон прямоугольника. Так как площадь прямоугольника $(x - 6)(x + 2) \text{ см}^2$ и по условию она равна 33 см^2 , то имеем уравнение

$$(x - 6)(x + 2) = 33.$$

Решим его:

$$x^2 - 6x + 2x - 12 = 33;$$

$$x^2 - 4x - 45 = 0;$$

$$D = 16 + 4 \cdot 45 = 4(4 + 45) = 4 \cdot 49 = 14^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 \pm 14}{2} = 2 \pm 7;$$

$$x = 9 \text{ или } x = -5.$$

Так как x — длина стороны квадрата, то $x > 0$, и, значит, $x = 9$. Тогда $x - 6 = 9 - 6 = 3$ (см); $x + 2 = 9 + 2 = 11$ (см) — длины сторон прямоугольника.

Ответ: 3 см и 11 см.

Заметим, что при решении текстовых задач, получив значения неизвестного, следует проверить, как они согласуются с данными условия задачи, и только потом записывать ответ. Проверка необходима, чтобы избежать смысловых несоответствий. Она помогает также избежать возможных логических и вычислительных ошибок.

Так, в примере 2 можно убедиться, что площадь прямоугольника при найденных длинах сторон равна 33 см^2 (действительно, $3 \cdot 11 = 33 \text{ (см}^2\text{)}$).

Записывать такую проверку в решение задачи необязательно.

Пример 3. В зрительном зале рядов в два раза больше, чем мест в каждом ряду. Если при перепланировке зала число рядов увеличить на 1, а число мест в каждом ряду увеличить на 8, то в зале будет 500 мест. Сколько мест в зале?

Решение. Пусть x — число мест в ряду, тогда $2x$ — число рядов. Число мест в ряду после перепланировки будет $(x + 8)$, а число рядов — $(2x + 1)$. Так как по условию после

перепланировки число мест в зале $(x + 8)(2x + 1)$ будет равно 500, то имеем уравнение

$$(x + 8)(2x + 1) = 500.$$

Решим его:

$$2x^2 + 16x + x + 8 = 500;$$

$$2x^2 + 17x - 492 = 0;$$

$$D = 17^2 + 4 \cdot 2 \cdot 492 = 289 + 3936 = 4225 = 65^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-17 \pm 65}{4};$$

$$x = -20,5 \text{ или } x = 12.$$

Так как число мест в ряду не может быть дробным отрицательным числом, то $x = -20,5$ не удовлетворяет условию задачи. Итак, число мест в ряду 12, а число рядов 24, значит, число мест в зале: $12 \cdot 24 = 288$.

Ответ: в зале 288 мест.

Проверим правильность вычислений: получится ли 500 при умножении чисел $12 + 8$ и $24 + 1$? Действительно, $20 \cdot 25 = 500$.



1. Назовите этапы решения текстовой задачи.
2. Как можно убедиться в отсутствии логических и вычислительных ошибок при решении текстовой задачи?

Упражнения

- 5.62°. 1) Сумма двух чисел равна 5, а сумма их квадратов равна 13. Найдите эти числа.
2) Разность двух чисел равна 2, а сумма их квадратов равна 52. Найдите эти числа.
- 5.63. 1) Сумма квадратов трех последовательных четных чисел равна 116. Найдите эти числа.
2) Сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел равна 302. Найдите эти числа.
- 5.64°. 1) Найдите двузначное число, зная, что цифра единиц искомого числа на 5 больше цифры его десятков и что произведение числа и суммы его цифр равно 637.

2) Найдите двузначное число, зная, что цифра десятков искомого числа на 4 больше цифры его единиц и что произведение числа и суммы его цифр равно 496.

5.65. 1) Произведение двух последовательных натуральных чисел в 4 раза больше меньшего из них. Найдите эти числа.

2) Произведение трех последовательных натуральных чисел в 3 раза больше среднего из них. Найдите эти числа.

5.66. 1) В первенстве по шахматам в школе были сыграны 406 партий. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый играл с каждым только один раз?

2) На школьном шашечном турнире было сыграно 72 партии, причем каждый игрок играл с каждым по две партии. Сколько школьников участвовало в турнире?

5.67. 1) В чемпионате по баскетболу было сыграно 66 матчей. Сколько команд участвовало в чемпионате, если каждая команда играла с каждой по одному разу?

2) Несколько школьников, уезжая из спортивного лагеря домой, обменялись сувенирами (каждый с каждым). Сколько было школьников, если понадобилось 56 сувениров?

5.68. 1) Несколько восьмиклассников при встрече приветствовали друг друга рукопожатиями. Сколько учеников встретились, если рукопожатий было 45?

2) Учащиеся 8-го Д класса после окончания восьми классов решили обменяться фотографиями каждый с каждым. Сколько учащихся обменялось фотографиями, если всего их было роздано 1260?

5.69*. 1) Найдите число, отличное от нуля, квадрат которого равен этому удвоенному числу. Сколько решений имеет задача?

2) Найдите число, отличное от нуля, которое меньше своего квадрата в 3 раза.

- 3) Найдите число, отличное от нуля, если известно, что сумма этого числа и его квадрата в 8 раз больше самого числа.
- 4) Найдите число, отличное от нуля, зная, что разность между его квадратом и самим числом в 5 раз больше искомого числа.
- 5.70*. 1) У прямоугольника со сторонами 4 см и 8 см большую сторону уменьшили на p см, а меньшую увеличили на p см. При каком значении p площадь нового прямоугольника будет наибольшей?
- 2) Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с суммой катетов, равной 10, наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.
- 3) Докажите, что из всех прямоугольников с периметром 60 см наибольшую площадь имеет квадрат.
- 5.71. 1) На плоскости даны несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Если через каждые две точки провести прямую, то получится 171 прямая. Сколько дано точек?
- 2) На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведены прямые. Сколько точек отмечено на плоскости, если известно, что всего проведено 45 прямых?

5.5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Определение. Квадратным трехчленом называется многочлен вида

$$ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

где a , b и c — числа, $a \neq 0$, x — переменная.

Таким образом, квадратный трехчлен (1) — это левая часть квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (2)$$

Дискриминантом квадратного трехчлена (1) называется дискриминант квадратного уравнения (2):

$$D = b^2 - 4ac.$$

Корнем квадратного трехчлена называется такое значение переменной, при котором он обращается в нуль, значит, корни квадратного трехчлена (1) вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{-(b + \sqrt{D})}{2a}, \quad x_2 = \frac{-(b - \sqrt{D})}{2a}.$$

Теорема. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с дискриминантом $D \geq 0$ разлагается на линейные множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни этого трехчлена, причем, если $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$, а если $D = 0$, то $x_1 = x_2$.

Доказательство. В квадратном трехчлене вынесем за скобки коэффициент a :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Из квадратного трехчлена $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ выделим полный квадрат (так, как это делалось в п. 5.3):

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = \\ &\downarrow \text{применим формулу разности квадратов} \downarrow \\ &= \left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right) = (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если $D > 0$, то $-\frac{b + \sqrt{D}}{2a} \neq -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}$, т. е. $x_1 \neq x_2$.

Если $D = 0$, то $-\frac{b + \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b - \sqrt{0}}{2a}$, т. е. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

В этом случае имеем

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2. \quad \square$$

Когда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2,$$

тогда x_1 называется **кратным корнем квадратного трехчлена** $ax^2 + bx + c$. (Говорят также, что x_1 — **кратный корень уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.)

Пример 1. Разложить трехчлен $7x^2 + 34x - 5$ на линейные множители.

Решение. Найдем корни трехчлена $7x^2 + 34x - 5$.

Для этого удобно использовать формулу (4) п. 5.3:

$$\frac{D}{4} = 17^2 + 7 \cdot 5 = 289 + 35 = 324 = 18^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a} = \frac{-17 \pm 18}{7};$$

$$x_1 = -5; \quad x_2 = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Итак, } 7x^2 + 34x - 5 = 7(x + 5)\left(x - \frac{1}{7}\right) = (x + 5)(7x - 1).$$

Пример 2. Найти значение дроби $\frac{7k^2 + 34k - 5}{k^2 + 3k - 10}$ при $k = 2\frac{1}{7}$.

Решение. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$7k^2 + 34k - 5 = 7(k + 5)\left(k - \frac{1}{7}\right) = (k + 5)(7k - 1);$$

$$k^2 + 3k - 10 = (k + 5)(k - 2).$$

$$\text{Тогда } \frac{7k^2 + 34k - 5}{k^2 + 3k - 10} = \frac{(k + 5)(7k - 1)}{(k + 5)(k - 2)} = \frac{7k - 1}{k - 2};$$

$$\left. \frac{7k - 1}{k - 2} \right|_{k=2\frac{1}{7}} = \frac{7 \cdot 2\frac{1}{7} - 1}{2\frac{1}{7} - 2} = \frac{15 - 1}{\frac{1}{7}} = 14 \cdot 7 = 98.$$

Ответ: 98.



1. Какой трехчлен называется квадратным?
2. Что называется корнем (кратным корнем) квадратного трехчлена?
3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.
4. Всегда ли квадратный трехчлен можно разложить на линейные множители?

Упражнения

Разложите квадратный трехчлен на множители (5.72—5.75).

- 5.72°. 1) $x^2 - 10x + 9$; 2) $x^2 - 2x - 35$;
3) $x^2 - 4x + 3$; 4) $x^2 - 4x - 60$;
5) $x^2 + 7x + 10$; 6) $x^2 + 25x + 114$;
7) $x^2 - 29x + 198$; 8) $x^2 - 17x + 72$.
- 5.73. 1) $3x^2 - 2x - 1$; 2) $5x^2 + x - 4$;
3) $2x^2 - 5x + 2$; 4) $2x^2 - x - 3$;
5) $15x^2 + 34x + 15$; 6) $30x^2 + 37x + 10$.
- 5.74. 1) $x^2 - ax - 6a^2$; 2) $x^2 + ax - 2a^2$;
3) $4x^2 - 20ax + 9a^2$; 4) $x^2 - 2ax - 24a^2$.
- 5.75. 1) $3x^2 - 6x - 5$; 2) $x^2 - 18x + 9$;
3) $0,8x^2 - 19,8x - 5$; 4) $3,5 + \frac{2}{3}x^2 - 3\frac{1}{3}x$;
5) $x^2 + \sqrt{2}x - 2$; 6) $x^2 - \sqrt{6}x + 1$.

5.76. Докажите тождество:

- 1) $3x^2 + 7x - 6 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 3)$;
2) $0,5(a + 5)(a - 6) = 0,5a^2 - 0,5a - 15$;
3) $4(x - 2\sqrt{3})(x + 5\sqrt{2}) = 4x^2 - 4(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})x - 40\sqrt{6}$;
4) $2x^2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}(\sqrt{2} - 1)x - \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(x + \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

Сократите дробь (5.77—5.78).

- 5.77. 1) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$; 2) $\frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 + 2x - 35}$;
3) $\frac{x^2 - 36}{2x^2 - 9x - 18}$; 4) $\frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 2x}$.
- 5.78. 1) $\frac{x^2 + 24 - 11x}{64 - x^2}$; 2) $\frac{5 - 2y^2 - 9y}{1 - 4y^2}$;
3) $\frac{20 + 8k - k^2}{k^2 - 11k + 10}$; 4) $\frac{3p^2 + 13p - 10}{12 - 16p - 3p^2}$;
5) $\frac{9p^2 + 6p + 1}{3p^2 + 7p + 2}$; 6) $\frac{4k^2 + 7k - 15}{16k^2 - 40k + 25}$.

5.79. Найдите значение дроби:

1) $\frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 9x + 20}$ при x , равном 5; -5; 4; -4;

2) $\frac{2x^2 + 9x - 5}{4x^2 + 20x}$ при x , равном 0,5; -0,5; 10; -10.

Выполните действия (5.80—5.81).

5.80. 1) $\frac{9-4a}{3-a} + \frac{4a^2-9}{2a^2-7a+3} : \frac{3+2a}{1-2a};$

2) $\frac{9a^2-16}{2a^2+7a+3} : \frac{3a-4}{1+2a} - \frac{2a+1}{a+3}.$

5.81. 1) $\left(\frac{1}{a+2} + \frac{2}{a+3} + \frac{2a-3}{a^2+5a+6} \right) : \frac{5a+4}{2a^2+4a};$

2) $\left(\frac{1}{2a+10} + \frac{5}{2a-2} - \frac{4a+17}{2a^2+8a-10} \right) : \frac{2a+7}{3a^2+15a}.$

5.6. Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

является частным случаем уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2)$$

где $a = 1$, $b = p$, $c = q$.

Подставляя эти значения a , b , c в формулу для вычисления корней квадратного уравнения, получаем соответствующий вид формулы.

Если у приведенного квадратного уравнения (1) дискриминант положительный, т. е. $D = p^2 - 4q > 0$, то корни уравнения (1) вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad (3)$$

или, короче, $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$

Если у приведенного квадратного уравнения (1) дискриминант равен нулю, т. е. $D = p^2 - 4q = 0$, то корень уравнения (1) вычисляется по формуле $x = \frac{-p}{2}.$

При $D < 0$ уравнение (1) корней не имеет.

▲ Формулу (3) можно записать и в виде

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

В таком виде формулой для вычисления корней приведенного квадратного уравнения удобно пользоваться, когда средний коэффициент p — четное число. ▲

В следующей теореме, говоря о корнях x_1, x_2 квадратного уравнения, мы будем учитывать и случай кратного корня, т. е., когда квадратное уравнение имеет единственный (значит, кратный) корень, будем брать его дважды.

Теорема. Если x_1, x_2 — корни приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Доказательство. Пусть $D > 0$. По формуле корней квадратного уравнения

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (4)$$

Складывая левые части и складывая правые части этих равенств, получаем $x_1 + x_2 = -p$.

Перемножая левые части и перемножая правые части равенств (4) и используя при этом формулу разности квадратов, получаем

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{p^2 - 4q})^2}{4} = \\ &= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q. \end{aligned}$$

Пусть $D = 0$. Тогда уравнение имеет единственный (кратный) корень $x = \frac{-p}{2}$. В этом случае возьмем его дважды:

$$x_1 = \frac{-p}{2}, \quad x_2 = \frac{-p}{2}.$$

Значит,

$$x_1 + x_2 = \frac{-p}{2} + \frac{-p}{2} = -p; \quad x_1 x_2 = \left(\frac{-p}{2}\right)\left(\frac{-p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}.$$

Так как $D = 0$, то $p^2 = 4q$, следовательно, $x_1 x_2 = q$. ☐

Доказанная теорема называется **теоремой Виета**. Она формулируется так:



сумма корней приведенного квадратного уравнения равна среднему коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Сумму и произведение корней произвольного квадратного уравнения можно выразить через его коэффициенты. Если x_1, x_2 — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то они являются корнями равносильного ему приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

По теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$



Франсуа Виет (1540—1603) — крупнейший французский математик своего времени. Его иногда называют «отцом алгебры». По профессии Ф. Виет был юристом. Заинтересовавшись астрономией, он стал заниматься математикой. В трудах Виета алгебра становится общей наукой об уравнениях, основанной на символических обозначениях. Он впервые обозначил буквами не только неизвестные, но и коэффициенты уравнений, благодаря чему стала возможной запись корней уравнения общими формулами. Но Виет не признавал отрицательных чисел и рассматривал только те случаи, когда корни уравнения были положительными.

Пример 1. Имеет ли уравнение корни? Если да, то найти сумму квадратов его корней:

а) $3x^2 - 7x + 11 = 0;$ (5)

б) $3x^2 - 7x - 11 = 0.$ (6)

Решение. а) Уравнение (5) не имеет корней, так как

$$D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot 11 < 0.$$

б) *Способ 1.* Уравнение (6) имеет два корня, так как

$$D = 49 + 4 \cdot 3 \cdot 11 > 0.$$

По теореме Виета находим:

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{3} \text{ и } x_1 x_2 = -\frac{11}{3}.$$

Из формулы квадрата суммы чисел x_1 и x_2 следует, что

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2.$$

Таким образом,

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{49}{9} + \frac{22}{3} = \frac{49+66}{9} = \frac{115}{9} = 12\frac{7}{9}.$$

Ответ: а) корней нет; б) $12\frac{7}{9}$.



Способ 2. Пример 1 б) можно решить иначе, вычислив непосредственно корни уравнения (6):

$$D = 49 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 181,$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{181}}{6}; \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{181}}{6};$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \left(\frac{7 - \sqrt{181}}{6}\right)^2 + \left(\frac{7 + \sqrt{181}}{6}\right)^2 = \\ &= \frac{49 - 2 \cdot 7\sqrt{181} + 181 + 49 + 2 \cdot 7\sqrt{181} + 181}{36} = \\ &= \frac{2(49 + 181)}{36} = \frac{2 \cdot 230}{36} = \frac{115}{9} = 12\frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Заметим, что эти вычисления более громоздкие, чем вычисления с использованием теоремы Виета (см. способ 1).

Пример 2. Если уравнение $x^2 + 47x + 23 = 0$ имеет корни, то определить знаки этих корней, не решая уравнение.

Решение. Уравнение $x^2 + 47x + 23 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , поскольку $D = 47^2 - 4 \cdot 23 > 0$. Согласно теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -47 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = 23.$$

Поскольку произведение корней — положительное число, то корни x_1 и x_2 — числа одного знака. А так как сумма $x_1 + x_2$ равна отрицательному числу, то x_1 и x_2 — отрицательные числа, т. е. $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, значит, они имеют знаки «минус».

Ответ: минус.

Пример 3. Составить приведенное квадратное уравнение с корнями $-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{7}$.

Решение. Пусть искомое приведенное квадратное уравнение имеет вид: $x^2 + px + q = 0$. Так как числа $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{3}{7}$ — его корни, то согласно теореме Виета

$$p = -(x_1 + x_2) \text{ и } q = x_1 x_2,$$

т. е.

$$p = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\right) = -\left(-\frac{7}{14} + \frac{6}{14}\right) = -\left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{1}{14};$$

$$q = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{7} = -\frac{3}{14}.$$

Ответ: $x^2 + \frac{1}{14}x - \frac{3}{14} = 0$.



1. Сформулируйте и докажите теорему Виета для приведенного квадратного уравнения.
2. Запишите соответствующими формулами теорему Виета:
 - а) для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$;
 - б) для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Упражнения

Если уравнение имеет корни, то найдите их сумму и произведение (5.82—5.83).

5.82°. 1) $x^2 - 5x - 24 = 0$; 2) $x^2 - 13x + 42 = 0$;

3) $x^2 + 14x + 48 = 0$; 4) $x^2 + 17x + 66 = 0$;

5) $x^2 - 20 = 0$; 6) $x^2 - 15 = 0$;

7) $x^2 + 33x = 0$; 8) $x^2 - 42x = 0$.

5.83°. 1) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; 2) $2x^2 - 7x + 6 = 0$;

3) $5x^2 - 8x + 3 = 0$; 4) $10x^2 - 3x + 1 = 0$;

5) $3x^2 + 2x + 8 = 0$; 6) $4x^2 - 17x - 15 = 0$;

7) $0,09x^2 - 0,6084x = 0$; 8) $\frac{5}{9}x^2 - 3380x = 0$.

Если уравнение имеет корни, то определите их знаки, не решая уравнение (5.84—5.86).

5.84°. 1) $x^2 + 5x + 3 = 0$; 2) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

3) $x^2 - 8x - 7 = 0$; 4) $x^2 - 5x + 3 = 0$;

5) $x^2 + 7x + 10 = 0$;

6) $x^2 - 4x - 60 = 0$;

7) $x^2 - 10x + 9 = 0$;

8) $x^2 + 25x + 14 = 0$.

5.85°. 1) $x^2 + 12x + 31 = 0$;

2) $x^2 - 14x + 46 = 0$;

3) $x^2 - 9x + 10 = 0$;

4) $x^2 + 11x + 20 = 0$;

5) $x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{5}{49} = 0$;

6) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{25} = 0$;

7) $x^2 + 0,4x - 0,96 = 0$;

8) $x^2 - 0,6x + 0,08 = 0$.

5.86°. 1) $4x - 3 = x^2 - 2x + 6$;

2) $6x - 1 = 5x + 7 + x^2$;

3) $(x-1)(x-2) + (x-2)(x-3) - (x-3)(x-4) = 0$;

4) $(x+1)(x+3) - (x+3)(x+2) + (x+2)(x+4) = 0$.

5.87°. 1) Один из корней уравнения $x^2 - 19x + 18 = 0$ равен 1. Найдите другой его корень.

2) Один из корней уравнения $x^2 + 6x + 8 = 0$ равен -2. Найдите другой его корень.

5.88. При каком значении t уравнение:

1) $2x^2 + tx + 68 = 0$ имеет корень, равный 2;

2) $3x^2 + tx - 54 = 0$ имеет корень, равный -2;

3) $4x^2 - 24x + t = 0$ имеет корень, равный 6;

4) $6x^2 + 30x + t = 0$ имеет корень, равный 0?

5.89. Найдите сумму квадратов корней уравнения:

1) $x^2 - 17x + 70 = 0$;

2) $x^2 + 6x - 40 = 0$;

3) $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{25} = 0$;

4) $x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{5}{49} = 0$;

5) $x^2 - 0,6x + 0,08 = 0$;

6) $x^2 + 0,4x - 0,96 = 0$.

5.90*. Не решая квадратное уравнение $5x^2 - x - 42 = 0$, найдите значение выражения, составленного из его корней x_1 и x_2 :

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

2) $x_1^2 + x_2^2$;

3) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$;

4)* $x_1^3 + x_2^3$.

и других корней у этого уравнения нет (поясните почему). После простых преобразований левой части уравнение (1) примет вид

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

откуда, учитывая условие теоремы, получим

$$x^2 + px + q = 0.$$

Так как это уравнение равносильно уравнению (1), то его корнями являются числа x_1 и x_2 . $\square$

Доказанное утверждение — и есть *теорема, обратная теореме Виета*.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 - 10x + 21 = 0. \quad (2)$$

Решение. Решим уравнение (2) подбором, руководствуясь следующим утверждением: если числа x_1 и x_2 — корни уравнения (2), то согласно теореме Виета должны быть верными равенства

$$x_1 + x_2 = 10 \quad \text{и} \quad x_1x_2 = 21,$$

и наоборот (по теореме, обратной теореме Виета), если верны эти равенства, то x_1 и x_2 — корни уравнения (2).

Легко заметить, что этим равенствам удовлетворяют числа 3 и 7. Таким образом, на основании теоремы, обратной теореме Виета, они и являются корнями данного уравнения.

Ответ: 3; 7.



Поскольку подбор чисел x_1 и x_2 выполняется обычно устно, то в тетради решение можно оформить следующим образом:

$$x^2 - 10x + 21 = 0,$$

$$x_1 = 3, x_2 = 7 \quad (\text{по теореме, обратной теореме Виета}).$$

Ответ: 3; 7.

Пример 2. Указать естественную область определения выражения

$$\frac{1}{x^2 - 7x + 10}.$$

Решение. Эта дробь имеет смысл, когда значение знаменателя не равно нулю. Поэтому в естественную область определения данной дроби входят все те значения x , которые не

являются корнями уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$ (как их найти?), т. е. $x \neq 2$ и $x \neq 5$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^2 + (\sqrt{5x})^2 - 14 = 0. \quad (3)$$

Решение. Корни уравнения (3) должны удовлетворять условию $5x \geq 0$, т. е. $x \geq 0$. При выполнении этого условия уравнение (3) равносильно уравнению

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$x = -7 \text{ или } x = 2.$$

Условию $x \geq 0$ удовлетворяет только одно из этих значений — число 2.

Ответ: 2.



В тетради решение можно оформить так:

$$x^2 + (\sqrt{5x})^2 - 14 = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 14 = 0, \\ 5x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x = -7 \text{ или } x = 2), \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x = 2.$$

Ответ: 2.



1. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета, для приведенного квадратного уравнения.

2. Приведите пример квадратного уравнения, которое легко решается с использованием теоремы, обратной теореме Виета.

3*. Докажите, что являются равносильными уравнения

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ и } x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Упражнения

Укажите корни квадратного уравнения, используя теорему, обратную теореме Виета (5.95—5.97).

- 5.95°. 1) $x^2 - 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 - 15x - 16 = 0$;
 3) $x^2 - 7x - 18 = 0$; 4) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
 5) $x^2 - 19x + 88 = 0$; 6) $x^2 + 16x + 63 = 0$;
 7) $x^2 + 2x - 48 = 0$; 8) $x^2 - x - 12 = 0$.

- 5.96°. 1) $x^2 + 10x - 39 = 0$; 2) $x^2 - 10x - 56 = 0$;
3) $x^2 + 17x - 270 = 0$; 4) $x^2 - 13x + 40 = 0$;
5) $x^2 + 2008x - 2009 = 0$; 6) $x^2 - 5614x + 5613 = 0$.
- 5.97. 1) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 20 = 0$;
3) $x^2 - 7(\sqrt{x})^2 - 8 = 0$; 4) $x^2 - 3(\sqrt{x})^2 - 10 = 0$;
5) $x^2 - (\sqrt{13x})^2 + 40 = 0$; 6) $x^2 - (\sqrt{8x})^2 + 7 = 0$.
- 5.98°. 1) Из пар чисел 5 и 7; -7 и 5; -7 и -5; -5 и 7 выберите ту, которая составлена из корней уравнения $x^2 + 2x - 35 = 0$.
2) Из пар чисел 3 и -5; 5 и -3; -5 и -3; 3 и 5 выберите ту, которая составлена из корней уравнения $x^2 - 2x - 15 = 0$.
3) Из пар чисел 21 и 2; -2 и 21; 7 и -6; 6 и -7 выберите ту, которая составлена из корней уравнения $x^2 - x - 42 = 0$.
4) Из пар чисел -5 и -3; 15 и 1; 5 и 3; -15 и -1 выберите ту, которая составлена из корней уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$.
- 5.99. Проверьте, являются ли числа x_1 и x_2 корнями уравнения:
1) $2x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$, $x_1 = 2a$, $x_2 = -\frac{a}{2}$;
2) $6x^2 + 5ax + a^2 = 0$, $x_1 = -\frac{a}{3}$, $x_2 = -\frac{a}{2}$;
3) $4x^2 - 20ax - 9a^2 = 0$, $x_1 = 4,5a$, $x_2 = 0,5a$;
4) $8x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}a$, $x_2 = -\frac{3}{4}a$.
- 5.100. Верно ли, что числа:
1) $5 + \sqrt{7}$ и $5 - \sqrt{7}$ являются корнями уравнения $x^2 - 10x + 18 = 0$;
2) $-3 + 2\sqrt{3}$ и $-3 - 2\sqrt{3}$ являются корнями уравнения $x^2 + 6x - 3 = 0$;
3) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ являются корнями уравнения $x^2 - 2\sqrt{5}x + 3 = 0$;
4) $-\sqrt{7} - \sqrt{3}$ и $-\sqrt{7} + \sqrt{3}$ являются корнями уравнения $x^2 + 2\sqrt{7}x - 4 = 0$?

5.101. 1) Не решая уравнение $5x^2 - 22x + 8 = 0$, составьте квадратное уравнение, один из корней которого равен 2, а другой — сумме корней данного уравнения.

2) Не решая уравнение $3x^2 + 2x - 15 = 0$, составьте квадратное уравнение, один из корней которого равен 3, а другой — произведению корней данного уравнения.

Укажите естественную область определения выражения (5.102—5.103).

5.102. 1) $\frac{4}{x^2 - 11x + 18}$; 2) $\frac{13}{x^2 - x - 2}$; 3) $\frac{x + 1}{x^2 - 5x + 4}$;

4) $\frac{2x + 3}{x^2 + 7x - 11}$; 5) $\frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 6}$; 6) $\frac{x^3 - 7}{x^2 - 4x + 3}$.

5.103*. 1) $\sqrt{x - 8} + \frac{1}{2x^2 - 18x - 24}$; 2) $\sqrt{x + 3} - \frac{5x}{3x^2 + 5x - 12}$;

3) $\frac{1}{x^2 - x - 6} - \sqrt{1 - x}$; 4) $\frac{1}{x^2 + x - 12} + \sqrt{6 - 3x}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x - 2}} + \frac{10}{x^2 + 2x - 8}$; 6) $\frac{42}{3x^2 - 13x + 12} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$.

5.8. Уравнения, содержащие переменную в знаменателе

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 2 - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}. \quad (1)$$

Решение. Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 3x + 2$ на множители:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Таким образом, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 2 - \frac{1}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Умножив обе части этого уравнения на выражение $(x - 1)(x - 2)$, получим уравнение

$$x - 2 + x - 1 = 2(x - 1)(x - 2) - 1.$$

После преобразований это уравнение примет вид $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Так как в процессе решения обе части уравнения умножали на выражение, содержащее переменную, и могли получить уравнение, равносильное данному, то необходима проверка.

Проверка. При $x = 1$ обе части уравнения (1) не имеют смысла (поясните почему).

При $x = 3$ из уравнения (1) получаем:

$$\frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = 2 - \frac{1}{9-9+2},$$

т. е. $\frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2}$ — верное числовое равенство.

Ответ: 3.



Заметим, что проверка найденных значений переменной при таком способе решения уравнения (использование умножения обеих частей уравнения на выражение с переменной) является **обязательной** частью решения, так как получаемое в процессе решения уравнение может быть не равносильно исходному.

При проверке найденные значения переменной подставляют в исходное уравнение или в равносильное ему.

Покажем еще один способ решения уравнений, содержащих неизвестное в знаменателе, основанный на получении условий, равносильных данному уравнению.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{51-x^2}{9-x^2} + \frac{7+x}{x-3} = 2 + \frac{4-x}{x+3}. \quad (2)$$

Решение. Перенеся все члены уравнения в левую часть и выполнив действия с дробями, получим уравнение, равносильное уравнению (2):

$$\frac{x^2+3x}{x^2-9} = 0.$$

Естественной областью определения дроби $\frac{x^2+3x}{x^2-9}$ являются значения переменной, которые не обращают знаменатель в нуль. Таким образом, значение этой дроби равно нулю тогда и только тогда, когда $x^2+3x=0$ и $x^2-9 \neq 0$.

Корни уравнения — числа -3 и 0 .

При $x = -3$ условие $x^2 - 9 \neq 0$ не выполняется, а при $x = 0$ выполняется (поясните почему); значит, корнем уравнения (2) является только число 0 .

Ответ: 0 .

Пример 3. Решить уравнение $\frac{(x^2 + 3x)(x + 3)}{x^2 - 9} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2 + 3x)(x + 3) = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} x(x + 3)^2 = 0, \\ (x - 3)(x + 3) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x = 0 \text{ или } x = -3), \\ (x \neq 3 \text{ и } x \neq -3); \end{cases} \quad x = 0.$$

Ответ: 0 .



Обратите внимание: при решении примера 3 мы не сокращали дробь, а сразу переходили к системе, равносильной исходному уравнению (используя условие равенства дроби нулю).

А что будет, если дробь сократить? В этом случае получится уравнение $\frac{x^2 + 3x}{x - 3} = 0$, корнями которого являются $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Но проверка показывает, что число -3 не удовлетворяет исходному уравнению (поясните почему). Значит, корень данного уравнения — только число 0 .



Таким образом, при сокращении дробей может получиться уравнение, которое, кроме корней данного уравнения, имеет еще какие-то корни. Следовательно, проверка найденных значений переменной по исходному уравнению необходима.

Пример 4. Решить уравнение

$$1 + \frac{1}{1 - x} = \frac{3}{x + 3}. \quad (3)$$

Решение. Способ 1 (с сохранением равносильности исходному уравнению).

$$1 + \frac{1}{1-x} - \frac{3}{x+3} = 0;$$

$$\frac{(1-x)(x+3) + x + 3 - 3(1-x)}{(1-x)(x+3)} = 0;$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)(x+3)} = 0.$$

Значение дроби $\frac{-x^2 + 2x + 3}{(1-x)(x+3)}$ равно нулю тогда и только тогда, когда

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (4)$$

и

$$(1-x)(x+3) \neq 0. \quad (5)$$

Решив уравнение (4), получим $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Значения -1 и 3 удовлетворяют условию (5).

Ответ: -1 ; 3 .



Способ 2 (без сохранения равносильности исходному уравнению). Умножив обе части уравнения (3) на общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на выражение $(1-x)(x+3)$, получим:

$$(1-x)(x+3) + x + 3 = 3(1-x);$$

$$x - x^2 + 3 - 3x + x + 3 = 3 - 3x;$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1.$$

Так как при решении обе части уравнения умножали на выражение, содержащее переменную, то необходима проверка полученных значений переменной x по условию (3).

Проверка. При $x = 3$ из уравнения (3) получаем:

$$1 + \frac{1}{1-3} = \frac{3}{3+3},$$

т. е. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ — верное числовое равенство, значит, 3 — корень уравнения.

При $x = -1$ из уравнения (3) получаем:

$$1 + \frac{1}{1-(-1)} = \frac{3}{-1+3},$$

т. е. $1 \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ — верное числовое равенство, значит, -1 — корень уравнения.



1. Сформулируйте условие равенства рациональной дроби нулю.
2. Опишите два способа решения уравнения с переменной в знаменателе. В чем суть каждого из подходов?
3. В каких случаях при решении уравнений с переменной в знаменателе проверка найденных значений является обязательной частью решения?
4. Куда при выполнении проверки подставляют значения переменной, найденные в ходе решения уравнения?

Упражнения

Решите уравнение (5.104—5.111).

5.104°. 1) $\frac{2m^2}{m-6} = \frac{8m}{m-6};$

2) $\frac{m^2}{5-m} = \frac{4}{5-m};$

3) $\frac{p^2}{p^2-9} = \frac{6-5p}{9-p^2};$

4) $\frac{5}{16-t^2} = \frac{t^2-6t}{t^2-16};$

5) $\frac{3k^2+4}{k-7} = \frac{3k+22}{k-7};$

6) $\frac{7k^2-2k}{1-2k} = \frac{k-6}{2k-1};$

7) $\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1};$

8) $\frac{x^2+4}{x-2} = \frac{4x}{x-2}.$

5.105. 1) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-3} = 0;$

2) $\frac{5x^2-9x-2}{8x-3} = 0;$

3) $\frac{x^2-9}{(x+1)^2-25} = 0;$

4) $\frac{(x+2)^2-49}{x^2-16} = 0;$

5) $\frac{x^2-5x}{(2x+1)^2-(x-2)^2} = 0;$

6) $\frac{(1-3x)^2-(1+x)^2}{7x-x^2} = 0.$

5.106. 1) $\frac{3x}{4} + \frac{3}{x-4} = 0;$

2) $\frac{x^2+4x}{x+2} - \frac{2x}{3} = 0;$

3) $\frac{3x-1}{3x+1} - \frac{2(x+3)}{x+12} = 0;$

4) $\frac{x-6}{3x-10} - \frac{x-1}{2x-11} = 0;$

5) $\frac{7}{2x+9} = 5x+6;$

6) $\frac{10}{2x-3} = x-1;$

7) $\frac{2x-1}{x+6} + 3 = 0;$

8) $\frac{2x-5}{x+5} - 4 = 0.$

5.107. 1) $\frac{2}{x-5} = 3 - \frac{14}{x};$

2) $\frac{10}{x-3} = 1 + \frac{8}{x};$

3) $\frac{120}{x} - 1 = \frac{120}{x+4};$

4) $\frac{180}{x} = \frac{180}{x+6} + 1;$

5) $\frac{5}{8} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-3};$

6) $\frac{4}{x+2} = 1,5 - \frac{4}{x-2}.$

5.108. 1) $\frac{x^2}{x-2} - \frac{x+2}{x-2} = 4$; 2) $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x+5} = 2$;
 3) $\frac{x}{x^2-16} + \frac{x-1}{x+4} = 1$; 4) $\frac{2x}{x-3} - \frac{6,4x}{x+3} = \frac{0,8x-20}{9-x^2}$;
 5) $\frac{12}{(x+6)^2} + \frac{x}{x+6} = 1$;
 6) $\frac{1}{x^2-16} + \frac{12}{(x+4)^2} - \frac{1}{(x-4)^2} = 0$.

5.109. 1) $\frac{x-4}{x+4} + \frac{x+4}{x-4} = \frac{10x+24}{x^2-16}$;
 2) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{7}{2x-x^2} = \frac{2}{x^2+2x}$;
 3)* $\frac{7}{2x+5} - \frac{2}{x+3} = \frac{3x+11}{45}$;
 4)* $\frac{8}{x-4} - \frac{5}{x-3} = \frac{3x-4}{7x-33}$.

5.110. 1) $\frac{5}{x-4} - \frac{3}{2x+2} = \frac{x-2}{2(x+1)}$;
 2) $\frac{9}{2(x+4)} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2(x-1)}$;
 3) $\frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)}$;
 4) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x-2}{x(x^2-1)}$;
 5) $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$;
 6) $\frac{2}{(x-1)(x+3)} + \frac{3}{(x-2)(x+3)} = \frac{5}{(x-1)(x-2)}$.

5.111*. 1) $\frac{1-\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+1} = 2$; 2) $\frac{1}{1-\frac{x-1}{x-2}} + x - 2 = 0$;
 3) $\frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x}$; 4) $x + \frac{1}{x} - \frac{4}{x + \frac{1}{x}} = 0$.

5.112. 1) При каких значениях x значение дроби $\frac{1-2x}{6+x}$ будет равным -5 ; 0 ; 1 ; 2 ?

2) При каких значениях x значение дроби $\frac{x^2+6x+4}{x-3}$ будет равным -2 ; 0 ; 2 ; 4 ?

5.113. Найдите корни уравнения:

1) $\frac{x^2-2x+1}{x-3} + \frac{x+1}{3-x} = 4$, которые удовлетворяют условию $x < \sqrt{2}$;

2) $\frac{36+2x^2}{x^2-12x} - \frac{3}{x-12} = 3$, которые удовлетворяют условию $-\sqrt{25} \leq x \leq \sqrt{16}$;

3) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$, которые удовлетворяют условию $x > \sqrt{4}$;

4) $\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 5$, которые удовлетворяют условию $-\sqrt{47} \leq x \leq \sqrt{5}$.

5.9. Использование уравнений, сводящихся к квадратным, при решении задач

Рассмотрим несколько примеров задач.

Пример 1. Саша сначала проплыл 15 км на лодке по Солигорскому водохранилищу, а затем 8 км по впадающей в него реке Случь, затратив на весь путь 4,5 ч. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна $2 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Решение. Пусть $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — собственная скорость лодки, тогда по реке она плыла со скоростью $(x-2) \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ (поясните почему). Поскольку по реке Саша плыл $\frac{8}{x-2}$ ч, по водохранилищу $\frac{15}{x}$ ч, а на весь путь он затратил 4,5 ч, то получим уравнение

$$\frac{8}{x-2} + \frac{15}{x} = \frac{9}{2}. \quad (1)$$

Решим это уравнение. Умножив обе части уравнения (1) на общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на выражение $2(x-2)x$, получим:

$$8 \cdot 2x + 15 \cdot 2(x-2) = 9 \cdot x(x-2).$$

Откуда имеем:

$$9x^2 - 64x + 60 = 0;$$

$$D = 64^2 - 4 \cdot 9 \cdot 60 = 4^2 \cdot (16^2 - 9 \cdot 15) = 4^2 \cdot 121 = 44^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{64 \pm 44}{18};$$

$$x_1 = 1\frac{1}{9}; \quad x_2 = 6.$$

Значение $1\frac{1}{9}$ не может быть решением задачи, так как собственная скорость лодки не может быть меньше скорости течения реки (поясните почему).

Значение $x=6$ проверяем подстановкой в уравнение (1) (поясните, почему необходима проверка) и получаем верное числовое равенство $2 + 2,5 = 4,5$, значит, 6 — корень уравнения (1).

Ответ: $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Пример 2. Туристам надо пройти от места привала до железнодорожной станции 24 км так, чтобы успеть к назначенному сроку. Спустя 3 ч после выхода они подошли к реке и искупались; на это у них ушло 18 мин. Чтобы прийти вовремя, им пришлось увеличить скорость на $1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. С какой скоростью туристы подошли к станции?

Решение. Пусть $x \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — первоначальная скорость туристов. За 3 ч они прошли $3x$ км; $\frac{24}{x}$ ч — время на дорогу до станции; $(24 - 3x)$ км — расстояние от реки до станции; $\frac{18}{60}$ ч — время купания; $\frac{24 - 3x}{x+1}$ ч — время в пути от реки до станции. Так как туристы пришли на станцию в назначенный срок, то получим уравнение

$$3 + \frac{18}{60} + \frac{24 - 3x}{x+1} = \frac{24}{x}.$$

Разделив все члены этого уравнения на 3, получим

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{8-x}{x+1} = \frac{8}{x}.$$

Умножим обе части этого уравнения на общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на выражение $10x(x+1)$:

$$10x(x+1) + x(x+1) + 10x(8-x) = 8 \cdot 10(x+1).$$

После преобразований получим уравнение $x^2 + 11x - 80 = 0$, откуда найдем: $x_1 = -16$, $x_2 = 5$.

Так как скорость туристов не может быть выражена отрицательным числом, то значение $x_1 = -16$ не может быть ответом. Значение $x_2 = 5$ проверим по исходному уравнению (поясните, почему необходима проверка) и получим верное числовое равенство: $3 + 0,3 + 1,5 = 4,8$, значит, 5 — корень.

Таким образом, скорость движения туристов от реки до станции $x + 1 = 5 + 1 = 6$ ($\frac{\text{км}}{\text{ч}}$).

Ответ: $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Напомним, что для самоконтроля можно проверить, удовлетворяет ли полученный ответ условию задачи (такую проверку не записывают в решение задачи).

Так, в примере 2 при найденной скорости $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ можно, используя данные задачи, вычислить время, потраченное на купание.

До реки туристы шли 3 ч со скоростью $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, значит, они прошли 15 км. По плану 24 км они должны были пройти за $\frac{24}{5}$ ч, т. е. за 4,8 ч. Время их движения от реки до станции равно $\frac{24-15}{6}$, т. е. 1,5 ч. Находим время, затраченное на купание: $4,8 - 3 - 1,5 = 0,3$ (ч), т. е. 18 мин, что соответствует условию задачи. Значит, ответ получен правильный.



1. В каких случаях при оформлении решения задачи обязательно записывают проверку найденных значений переменной?
2. Предложите сюжет текстовой задачи, в которой по смыслу не подходит значение:
а) $x = -4$; б) $x = 3,5$; в) $x = 10$.
3. Как можно убедиться в том, что при решении текстовой задачи получен верный ответ?

Упражнения

- 5.114. 1) Моторная лодка прошла по реке Сервечь до ее впадения в Вилейское водохранилище 33 км, а затем шла по водохранилищу еще 16 км, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения реки $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите собственную скорость лодки.
- 2) Катер прошел по Чигиринскому водохранилищу 27 км, а затем он шел 45 км по реке Друть, впадающей в водохранилище, затратив на весь путь 4 ч 30 мин. Скорость течения реки $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите собственную скорость катера.
- 5.115. 1) Лодка, двигаясь по течению реки Припять, затрачивает на прохождение одного километра на 3 мин меньше, чем двигаясь против течения. За какое время лодка пройдет по Припяти 10 км и вернется обратно, если ее скорость по течению на $1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости против течения?
- 2) Лодка, двигаясь против течения реки Неман, затрачивает на прохождение одного километра на $11\frac{3}{7}$ мин больше, чем двигаясь по течению. Проплыв по течению 30 мин, а против течения — 3,5 ч, лодка прошла 14 км. Найдите скорость течения Немана.
- 5.116. 1) Братья Саша и Витя могут собрать из деталей конструктора модель автомобиля за 6 мин. Один Саша мог бы собрать модель на 5 мин быстрее, чем Витя. За какое время Саша и Витя в одиночку могли бы собрать модель автомобиля?
- 2) Сестры Настя и Катя пропололи клубнику за 3 ч 36 мин. Одна Настя могла бы прополоть грядки на 3 ч быстрее, чем одна Катя. За какое время могли бы прополоть клубнику в одиночку Настя и Катя?
- 5.117. 1) Туристки Даша и Вика одновременно выходят из Минска в Раубичи, расстояние между которыми 30 км. Вика проходит в час на 1 км больше Даши и поэтому приходит в Раубичи часом раньше. Сколько километров проходит каждая из туристок за один час?

2) Велосипедисты Лёня и Дима выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Лёня проезжает в час на 2 км больше Димы и поэтому приезжает в пункт B на 2 ч раньше, чем Дима в пункт A . Расстояние AB равно 120 км. Какова скорость движения каждого велосипедиста?

5.118. 1) Расстояние в 32 км один лыжник прошел на 32 мин быстрее другого. Скорость первого лыжника была на $3 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости второго. Какова скорость каждого лыжника?

2) Расстояние в 360 км скорый поезд прошел на 1,5 ч быстрее товарного. Какова средняя скорость каждого поезда, если скорость движения товарного поезда на $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше, чем скорого?

5.119. 1) На середине пути между станциями Негорелое и Тевли поезд был задержан на 24 мин. Чтобы прибыть в Тевли по расписанию, машинисту пришлось увеличить скорость поезда на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями Негорелое и Тевли равно 240 км.

2) Поезд должен пройти 108 км. Пройдя 28 км, он был задержан у семафора на 20 мин. Увеличив после этого скорость на $10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, поезд прибыл в место назначения с опозданием на 4 мин. Определите первоначальную скорость поезда.

5.120. 1) Несколько детей разделили поровну между собой 28 конфет. Если бы детей было на 3 меньше, то каждый получил бы дополнительно 3 конфеты. Сколько было детей?

2) Работница укладывает 588 фломастеров поровну по пачкам. Если в каждую пачку класть на 7 фломастеров больше, то пачек станет на 7 меньше. Сколько фломастеров должно быть в одной пачке?

- 5.121. 1) В концертном зале 323 места. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в концертном зале?
- 2) В нескольких одинаковых блокнотах содержится 300 листов. Если бы блокнотов было на 2 меньше, а число листов в каждом из них было на 20 больше, то во всех блокнотах стало бы 240 листов. Сколько было блокнотов?
- 5.122. 1) На выставке акварелей надо разместить поровну на подготовленных стендах 220 конкурсных работ. Если на каждом стенде вывешивать на 2 акварели меньше, то понадобится еще один стенд. Сколько подготовлено стендов для выставки?
- 2) Если в каждый автобус поместить одинаковое число пассажиров, то будет размещено 240 человек. Если число автобусов увеличить на 2, а число пассажиров в каждом автобусе увеличить на 5, то в автобусах разместится 390 пассажиров. Сколько человек должно было размещаться в одном автобусе?
- 5.123. 1) В парке рядом расположены две карусели: «Ракета» и «Верблюд». Папа, наблюдая, как его сыновья катаются на разных каруселях, заметил, что «Ракета» делает оборот на 10 с быстрее, чем «Верблюд», и успевает за 2 мин сделать на 2 оборота больше. За какое время делает один оборот «Ракета» и за какое время «Верблюд»?
- 2) В витрине магазина игрушек перед Новым годом установили две вращающиеся композиции: на одной круглой площадке были установлены елка и Дед Мороз со Снегурочкой, а на другой — разные игрушки. Слава подсчитал, что за 5 мин оба круга сделали вместе 35 оборотов. За какое время делает один оборот каждый круг, если площадка с елкой совершает полный оборот на 5 с дольше, чем площадка с игрушками?

- 5.124*. 1) Борис собирался проехать 84 км на велосипеде с одной и той же скоростью. Но первую половину пути он проехал со скоростью на $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше, чем планировал, а вторую половину — со скоростью на $4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше запланированной. На весь путь Борис затратил время, отличающееся от намеченного на 32 мин. С какой скоростью собирался ехать Борис? Раньше или позже намеченного срока он приехал?
- 2) Мотоциклист Володя проезжает 80 км на 2 ч 24 мин быстрее велосипедиста Глеба. Если Глеб увеличит скорость на 50 %, то его скорость станет меньше скорости Володи на $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На сколько медленнее Володи проедет Глеб в этом случае 80 км?
- 5.125. 1) Из Лепеля в одном направлении с интервалом в 48 мин выехали на мотоцикле Миша и на автомобиле Шура. Скорость автомобиля превышает скорость мотоцикла на $25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Шура догнал Мишу в 120 км от Лепеля. Найдите скорости движения Шуры и Миши.
- 2) Рота совершила на учениях марш-бросок по горной тропе длиной 12 км и по ровному участку длиной 21 км. По горному участку солдаты шли со скоростью на $5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше, чем по ровному, и затратили на преодоление горного участка на 3 ч больше, чем на прохождение ровного участка. Найдите скорость движения солдат по ровному участку.
- 5.126. 1) В последний день похода две группы туристов вышли одновременно со стоянки на озере Мядель на турбазу «Озеро Нарочь», находящуюся в 24 км от стоянки. Одна группа пришла на базу на 48 мин раньше другой. За какое время каждая группа прошла путь до турбазы, если первая группа проходила за час на 1 км больше, чем вторая?
- 2) Две группы туристов вышли из Логойска и Хатыни навстречу друг другу. К моменту встречи оказалось, что первая группа прошла 15 км, а вторая — 10 км, причем скорость второй группы была больше скоро-

сти первой на $1,5 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Определите, сколько времени затратила каждая группа на прохождение маршрута Логойск — Хатынь, если известно, что вторая группа вышла на 1 ч 40 мин позже первой.

5.127. 1) Из Смоленска и Бреста, находящихся на расстоянии 720 км, одновременно навстречу друг другу выехали два поезда и встретились через 5 ч. Известно, что один из них преодолел весь путь на 2 ч 15 мин быстрее другого. Найдите скорости поездов.

2) Расстояние между Брестом и Минском 360 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля, и через 1 ч после встречи расстояние между автомобилями составило 90 км. Найдите скорости автомобилей, если один из них проехал весь путь на 1 ч 48 мин быстрее другого.

5.128. 1) Школьники Валера и Слава пообещали учительнице математики набрать на компьютере к концу четверти по 240 текстовых задач. Валера набирал в день на 8 задач больше, чем Слава, при этом ежедневно каждый набирал одно и то же число задач. Сколько задач набирал каждый мальчик за один день, если известно, что Валера набрал все задачи за 3 дня до обещанного срока, а Слава — за 2 дня до срока?

2) Магазин должен за определенный срок реализовать 360 телевизоров «Горизонт» и 341 телевизор «Витязь». Телевизоров «Горизонт» ежедневно продавали в среднем на 5 больше, чем телевизоров «Витязь», и продали их на 2 дня раньше срока, а телевизоры «Витязь» были реализованы за 1 день до срока. Сколько телевизоров каждой марки продавали ежедневно?

5.129. 1) Чтобы из приготовленного фарша и теста налепить месячный запас пельменей для хранения в морозильнике, Любе надо на 4 ч больше, чем Ире. После того как Люба 2 ч лепила пельмени одна, к ней присоединилась Ира, и они вместе за 4 ч закончили лепить пельмени. За сколько часов каждая хозяйка в отдельности могла бы сделать запас пельменей?

2) Юре и Диме поручили шинковать капусту для засолки на зиму. Они справились с работой за 7 ч. Три часа капусту шинковал один Юра, затем его сменил Дима — он и закончил работу. За сколько часов Дима и Юра шинковали бы приготовленную для засолки капусту, работая отдельно, если известно, что Юре на это понадобилось бы на 2 ч меньше, чем Диме?

- 5.130. 1) Степа и Стась могут вместе вскопать дачный участок за 4 ч. Сначала Степа один вскопал половину участка. Затем его сменил Стась и закончил всю работу. Весь участок был вскопан за 9 ч. За какое время Степа и Стась в отдельности могли бы вскопать участок, если известно, что скорость вскапывания у них разная?
- 2) Чтобы связать 10 ажурных салфеток из тонких ниток, Свете требуется на 5 дней больше, чем Тане, и на 9 дней больше, чем Наташе. Света и Таня вместе могут связать все салфетки за столько же дней, что и одна Наташа. За какое время могла бы связать все салфетки каждая девочка в отдельности?

- 5.131. 1) Федя решил подготовиться к контрольной работе — потренироваться в решении квадратных уравнений. За первый час он решил несколько уравнений, а за второй час — на 12 уравнений больше. В течение третьего часа число решенных уравнений увеличилось по сравнению со вторым часом во столько же раз, во сколько раз увеличилось количество решенных уравнений за второй час по сравнению с первым. За три часа Федя решил 78 уравнений. Сколько уравнений решил Федя за первый час?
- 2) Ваня решил хорошо подготовиться к зачету по алгебре по списку вопросов, который дала Татьяна Владимировна. За первый день он подготовился по нескольким вопросам, за второй день он подготовил на 4 вопроса больше. За третий день Ваня подготовил по сравнению со вторым днем во столько раз больше вопросов, во сколько раз за второй день он подготовил больше вопросов, чем за первый. Известно, что за первые два дня Ваня выучил на 11 вопросов больше, чем за третий день. Сколько вопросов подготовил Ваня за первый день?

5.10. Решение уравнений методом замены переменной

В ряде случаев решение уравнения можно свести к решению квадратного уравнения введением новой переменной (нового неизвестного).

Пример 1. Решить уравнение $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$.

Решение. Введем новую переменную $u = x^2$. Подставив u вместо x^2 в данное уравнение, получим $9u^2 - 37u + 4 = 0$ — квадратное уравнение относительно u . Решив его, найдем

$$u = \frac{1}{9} \text{ или } u = 4.$$

Таким образом, учитывая, что $u = x^2$, получим:

$$x^2 = \frac{1}{9} \text{ или } x^2 = 4.$$

Откуда

$$x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = \frac{1}{3} \text{ или } x = -2 \text{ или } x = 2.$$

Ответ: -2 ; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 2 .

Определение. Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где a, b, c — числа, $a \neq 0$, называется **биквадратным**.

Рассмотрим еще два примера, в которых требуется решать биквадратные уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $4x^4 + 11x^2 - 45 = 0$.

Решение. Введем новое неизвестное $u = x^2$. Подставив u вместо x^2 в данное уравнение, получим

$$4u^2 + 11u - 45 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем

$$u = -5 \text{ или } u = \frac{9}{4}.$$

Таким образом, получим:

$$x^2 = -5 \text{ или } x^2 = \frac{9}{4}.$$

Первое из этих уравнений корней не имеет. Для второго получим:

$$x = -\frac{3}{2} \text{ или } x = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $-1,5$; $1,5$.

Метод, которым мы решали биквадратные уравнения, называется *методом замены переменной*.

Пример 3. Разложить на линейные множители трехчлен $x^4 - 9x^2 + 20$.

Решение. Обозначив $u = x^2$, получим трехчлен $u^2 - 9u + 20$, корнями которого являются числа $u_1 = 4$, $u_2 = 5$. Таким образом,

$$u^2 - 9u + 20 = (u - 4)(u - 5).$$

Откуда, учитывая обозначение, получим

$$x^4 - 9x^2 + 20 = (x^2 - 4)(x^2 - 5) = (x + 2)(x - 2)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}).$$

Кроме биквадратных, многие другие уравнения решаются с помощью замены переменной. Вот примеры таких уравнений.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2 - |x| - 6 = 0. \quad (1)$$

Решение. Заметив, что $x^2 = |x|^2$, введем новую переменную $t = |x|$. Подставив вместо $|x|$ переменную t в уравнение (1), получим

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Таким образом, получим два уравнения:

$$|x| = -2; \quad |x| = 3.$$

Первое уравнение корней не имеет (поясните почему).

Из второго уравнения найдем $x = -3$ или $x = 3$.

Ответ: -3 ; 3 .

Пример 5. Решить уравнение

$$(2x^2 + 5x - 2)^2 - 6x^2 - 15x + 6 = -2.$$

Решение. $(2x^2 + 5x - 2)^2 - 3(2x^2 + 5x - 2) + 2 = 0$.

Введем новую переменную $u = 2x^2 + 5x - 2$. Тогда

$$u^2 - 3u + 2 = 0,$$

откуда

$$u = 1 \text{ или } u = 2.$$

Таким образом, учитывая обозначение, найдем:

$$2x^2 + 5x - 2 = 1 \quad (2)$$

или

$$2x^2 + 5x - 2 = 2. \quad (3)$$

Решив уравнения (2) и (3) (сделайте это самостоятельно), получим четыре значения x .

Ответ: -3 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{57}}{4}$; $\frac{-5+\sqrt{57}}{4}$.

Пример 6. Решить уравнение $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{6}{x^2-2x} - 12 = 0$.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$\frac{1}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-2x} - 12 = 0. \quad (4)$$

Обозначим $u = x^2 - 2x$. Подставив u вместо $x^2 - 2x$ в уравнение (4), получим уравнение

$$\frac{1}{u+1} - \frac{6}{u} - 12 = 0. \quad (5)$$

Умножив обе части этого уравнения на общий знаменатель его дробей, т. е. на выражение с переменной $u(u+1)$, получим уравнение

$$u - 6(u+1) - 12u(u+1) = 0.$$

После преобразований это уравнение примет вид

$$12u^2 + 17u + 6 = 0,$$

откуда:

$$u = -\frac{3}{4} \text{ или } u = -\frac{2}{3}.$$

Проверка (поясните, почему она необходима) показывает, что оба числа удовлетворяют уравнению (5).

Таким образом, учитывая обозначение, получим:

$$x^2 - 2x = -\frac{3}{4} \text{ или } x^2 - 2x = -\frac{2}{3};$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \text{ или } 3x^2 - 6x + 2 = 0.$$

Решив эти уравнения (сделайте это самостоятельно), получим четыре значения x .

Ответ: $\frac{1}{2}$; $1,5$; $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$.

Пример 7. Решить уравнение $x - 5\sqrt{x-7} - 13 = 0$.

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$x - 7 - 5\sqrt{x-7} - 6 = 0. \quad (6)$$

Обозначим $u = \sqrt{x-7}$, тогда $x - 7 = u^2$. После подстановки в уравнение (6) получим

$$u^2 - 5u - 6 = 0.$$

Откуда найдем:

$$u = -1 \text{ или } u = 6.$$

Таким образом, учитывая обозначение, получим:

$$\sqrt{x-7} = -1 \quad (7)$$

или

$$\sqrt{x-7} = 6. \quad (8)$$

Уравнение (7) корней не имеет (поясните почему).

Решив уравнение (8), получим $x = 43$.

Ответ: 43.



1. Какое уравнение называется биквадратным?
2. Как решается биквадратное уравнение?
3. Как решается уравнение методом замены переменной?
- 4*. Сколько корней может иметь биквадратное уравнение?
- 5*. В каких случаях биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$):
 - а) имеет единственный корень;
 - б) имеет два корня;
 - в) имеет три корня;
 - г) имеет четыре корня;
 - д) не имеет корней?

Упражнения

Решите уравнение (5.132—5.136).

- 5.132°. 1) $2x^4 - 3x^2 - 7 = 0$; 2) $7x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;
3) $3x^4 - 9x^2 - 11 = 0$; 4) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$;
5) $-x^4 + 2x^2 - 15 = 0$; 6) $-2x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.
- 5.133°. 1) $x^4 - 16 = 0$; 2) $x^4 - 25 = 0$;
3) $x^4 + 81 = 0$; 4) $x^4 + 9 = 0$;
5) $16x^4 - 25 = 0$; 6) $49x^4 - 64 = 0$.

- 5.134°. 1) $81x^2 - 64x^4 = 0$; 2) $529x^4 - x^2 = 0$;
3) $9x^4 = 16x^2$; 4) $441x^2 = 64x^4$;
5) $121x^4 + 100x^2 = 0$; 6) $225x^2 + 9x^4 = 0$.
- 5.135. 1) $x^4 + 4 = 5x^2$; 2) $x^4 + 12x^2 = 64$;
3) $x^4 + 4(3x^2 + 8) = 0$; 4) $x^4 + 2(4,5x^2 + 10) = 0$;
5) $2x^4 - 2x^2 = \frac{3}{2}$; 6) $3x^4 + x^2 = \frac{2}{3}$.
- 5.136. 1) $x^4 + 1 - 2x^2 = 0$; 2) $x^4 + 16 + 4x^2 = 0$;
3) $x^4 + 72x^2 + 1296 = 0$; 4) $x^4 - 18x^2 + 9 = 0$.
- 5.137. 1) Является ли число $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 2x^2 - 10 = 0$?
2) Является ли число $\sqrt{6 + \sqrt{6}}$ корнем биквадратного уравнения $x^4 - 12x^2 + 30 = 0$?

Разложите многочлен на множители (5.138—5.139).

- 5.138°. 1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 2) $x^4 - 14x^2 + 24$;
3) $x^4 - 10x^2 + 9$; 4) $x^4 - 13x^2 + 36$;
5) $x^4 - 17x^2 + 16$; 6) $x^4 - 37x^2 + 36$.
- 5.139. 1) $3x^4 - 7x^2 + 2$; 2) $2x^4 - 19x^2 + 9$;
3) $-12x^4 - x^2 + 6$; 4) $-6x^4 + x^2 + 15$;
5) $-5x^4 - x^2 + 4$; 6) $-3x^4 + x^2 + 2$.

5.140. Сократите дробь:

- 1) $\frac{k^4 + 9 - 10k^2}{36 - 13k^2 + k^4}$; 2) $\frac{20 + p^4 - 9p^2}{p^4 + 24 - 10p^2}$;
3) $\frac{c^4 - 4c^2 + 3}{c^4 + 27 - 12c^2}$; 4) $\frac{y^4 - 17y^2 + 16}{49 - 50y^2 + y^4}$.

5.141. Приведите пример биквадратного уравнения, которое:

- 1) не имеет корней;
2) имеет два корня;
3) имеет четыре корня.

5.142. Составьте уравнение по его корням:

1) $-3; 3; -2; 2;$

2) $-6; 6; -3; 3;$

3) $-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{3};$

4) $-\sqrt{6}; \sqrt{6}; -\sqrt{3}; \sqrt{3};$

5) $-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; -2; 2;$

6) $-\frac{2}{7}; \frac{2}{7}; 5; -5.$

5.143. Найдите сумму корней уравнения, если они есть:

1) $x^4 - 9x^2 + 18 = 0;$

2) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0;$

3) $4x^4 = 12x^2 - 1;$

4) $12y^4 = y^2 - 100.$

5.144*. Докажите, что если биквадратное уравнение имеет корни, то сумма всех его корней равна нулю.

5.145*. При каких значениях a уравнение не имеет корней:

1) $x^4 - 12x^2 + a = 0;$

2) $x^4 + 9x^2 + a = 0;$

3) $x^4 + ax^2 + 100 = 0;$

4) $x^4 + 10ax^2 + 160 = 0?$

5.146*. 1) При каких значениях p уравнение $x^4 - 6x^2 + p = 0$:

а) имеет четыре корня;

б) имеет два корня;

в) не имеет корней?

2) При каких значениях k уравнение $x^4 + kx^2 + 21 = 0$:

а) имеет четыре корня;

б) имеет два корня;

в) не имеет корней?

5.147*. 1) Один из корней биквадратного уравнения равен 6, а другой — 5. Составьте уравнение.

2) Один из корней биквадратного уравнения равен $\frac{1}{3}$, а другой — 4. Составьте уравнение.

Решите уравнение (5.148—5.157).

5.148. 1) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 25x^2 - 16;$

2) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 1;$

3) $(3x - 4)(4 + 3x)(9x^2 - 16) = (5 - x^2)^2;$

4) $(2 - 5x)(5x + 2)(4 - 25x^2) = (3 + 20x^2)^2.$

5.149. 1) $(x^2 - 1)^2 - 3(x^2 - 1) + 2 = 0;$

2) $(x^2 + 1)^2 - 13(x^2 + 1) + 36 = 0;$

$$3) \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0;$$

$$4) \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 4,5\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + 5 = 0.$$

$$5.150. \quad 1) (x+5)^4 - 13(x+5)^2 + 36 = 0;$$

$$2) (4x-3)^4 - (4x-3)^2 - 12 = 0;$$

$$3) (2x^2+3)^4 = 12(2x^2+3)^2 - 11;$$

$$4) (x^2-2x)^4 - 3 = 2(x^2-2x)^2.$$

$$5.151. \quad 1) (x^2+x)(x^2+x-5) = 84;$$

$$2) (x^2+2x)(x^2+2x+2) = 3;$$

$$3) (x^2+x-1)(x^2+x+2) = 40;$$

$$4) (x^2-x-16)(x^2-x+2) = 88.$$

$$5.152. \quad 1) \frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = \frac{4}{3}\sqrt{3};$$

$$2) \frac{x^2+4}{x} + \frac{x}{x^2+4} = 2,9;$$

$$3) \frac{x^2+1}{3x-2} + \frac{3x-2}{x^2+1} = 2\frac{1}{2};$$

$$4) \frac{x^2+2}{3x-2} - \frac{3x-2}{x^2+2} = 2\frac{2}{3}.$$

$$5.153. \quad 1) x^4 + \frac{123}{2x^4+9} = 19;$$

$$2) 5x^4 = 84 - \frac{316}{5x^4-1};$$

$$3) \sqrt{x^2-1} - \frac{6}{\sqrt{x^2-1}} = 1;$$

$$4) \sqrt{x^2-9} + \frac{21}{\sqrt{x^2-9}} = 10.$$

$$5.154. \quad 1) \left(\frac{4x-5}{3x+2}\right)^2 + \left(\frac{3x+2}{5-4x}\right)^2 = 4,25;$$

$$2) \left(\frac{3-2x}{5x+1}\right)^2 = \frac{82}{9} - \left(\frac{5x+1}{2x-3}\right)^2;$$

$$3) \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{6}{x^2-2x} - 12 = 0;$$

$$4) \frac{120}{x^2+4x} - 1 = \frac{120}{(x+2)^2}.$$

$$5.155. \quad 1) 2\sqrt{x} + x - 3 = 0;$$

$$2) x - 5 = 4\sqrt{x};$$

$$3) x - 3 - 5\sqrt{x-3} + 6 = 0;$$

$$4) 3x - 2 = 3\sqrt{3x-2} + 10;$$

$$5) x - 5\sqrt{x+4} - 10 = 0;$$

$$6) x - 8\sqrt{x-3} + 9 = 0.$$

- 5.156. 1) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 7$;
2) $x^2 - 7x + \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 24$;
3) $x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21$;
4) $x^2 - 8\sqrt{x^2 - 1} + 16 = 0$.

- 5.157*. 1) $x^5 + x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 0$;
2) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$;
3) $2x^5 - 8x^4 - 14x^3 + 56x^2 - 36x + 144 = 0$;
4) $3x^5 - x^4 + 39x^3 - 13x^2 + 126x - 42 = 0$.

▲ 5.11. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Рассмотрим несколько уравнений, содержащих переменную (неизвестное) под знаком модуля.

Пример 1. Решить уравнение

$$|x^2 - 2x - 39| = 24. \quad (1)$$

Решение. По определению модуля значение переменной x является корнем уравнения (1) тогда и только тогда, когда оно является корнем уравнения

$$x^2 - 2x - 39 = 24 \quad (2)$$

или корнем уравнения

$$x^2 - 2x - 39 = -24. \quad (3)$$

Решив уравнение (2), получим: $x_1 = 9$, $x_2 = -7$.

Решив уравнение (3), получим: $x_3 = -3$, $x_4 = 5$.

Ответ: -7 ; -3 ; 5 ; 9 .

Пример 2. Решить уравнение

$$|5x^2 - 13x + 6| = -x^2 - 6. \quad (4)$$

Решение. Так как при любых значениях x верны неравенства

$$-x^2 - 6 < 0 \text{ и } |5x^2 - 13x + 6| \geq 0,$$

то уравнение (4) не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 3. Решить уравнение

$$9x^2 - \frac{x}{|x|} = 0. \quad (5)$$

Решение. Корни уравнения (5) должны удовлетворять условию $x \neq 0$. По определению модуля при $x > 0$ уравнение (5) равносильно уравнению

$$9x^2 - \frac{x}{x} = 0, \quad (6)$$

а при $x < 0$ уравнение (5) равносильно уравнению

$$9x^2 - \frac{x}{-x} = 0. \quad (7)$$

Преобразовав уравнение (6), получим

$$9x^2 - 1 = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{1}{3} \text{ или } x = \frac{1}{3}.$$

Но условию $x > 0$ удовлетворяет только значение $x = \frac{1}{3}$.

Преобразовав уравнение (7), получим

$$9x^2 + 1 = 0.$$

Это уравнение не имеет корней (поясните почему).

Ответ: $\frac{1}{3}$.



Решение уравнения (5) можно оформить следующим образом.

Уравнение $9x^2 - \frac{x}{|x|} = 0$ равносильно утверждению:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 9x^2 - \frac{x}{x} = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ 9x^2 - \frac{x}{-x} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решив первую систему из (8), получим:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 9x^2 - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = \frac{1}{9}; \end{cases} \quad x = \frac{1}{3}.$$

Решив вторую систему из (8), получим систему $\begin{cases} x < 0, \\ 9x^2 + 1 = 0, \end{cases}$

которая не имеет решений, так как не имеет корней уравнение $9x^2 + 1 = 0$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 - 3x + \frac{10|3x-7|}{3x-7} = 0$.

Решение. Уравнение $x^2 - 3x + \frac{10|3x-7|}{3x-7} = 0$ равносильно утверждению

$$\begin{cases} 3x - 7 > 0, \\ x^2 - 3x + \frac{10(3x-7)}{3x-7} = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x - 7 < 0, \\ x^2 - 3x + \frac{10(-3x+7)}{3x-7} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решив первую систему из (9), получим систему $\begin{cases} x > \frac{7}{3}, \\ x^2 - 3x + 10 = 0, \end{cases}$ которая не имеет решений, поскольку урав-

нение $x^2 - 3x + 10 = 0$ не имеет корней (поясните почему).

Решив вторую систему из (9), получим:

$$\begin{cases} x < \frac{7}{3}, \\ x^2 - 3x - 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{7}{3}, \\ (x = -2 \text{ или } x = 5); \end{cases} \quad x = -2.$$

Ответ: -2 .

Пример 5. Решить уравнение

$$|8x^2 - 4x + 1| = |3x^2 + 9x - 7|. \quad (10)$$

Решение. Модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа или равны, или противоположны. Таким образом, значение x является корнем уравнения (10) тогда и только тогда, когда оно является корнем уравнения

$$8x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 9x - 7 \quad (11)$$

или корнем уравнения

$$8x^2 - 4x + 1 = -(3x^2 + 9x - 7). \quad (12)$$

Решив уравнение (11), получим: $x_1 = 1,6$, $x_2 = 1$.

Решив уравнение (12), получим: $x_3 = -1$, $x_4 = \frac{6}{11}$.

Ответ: -1 ; $\frac{6}{11}$; 1 ; $1,6$.



1. Дайте два определения модуля числа a .
2. Модули каких двух чисел равны? Приведите примеры.
3. Запишите равенство, равносильное равенству $|a| = |b|$, если:
а) $a \leq 0, b \geq 0$; б) $a \geq 0, b \leq 0$; в) $a \geq 0, b \geq 0$; г) $a \leq 0, b \leq 0$.
- 4*. Верно ли, что равенства $|a| = |b|$ и $a^2 = b^2$ равносильны?

Упражнения

Решите уравнение (5.158—5.166).

5.158. 1) $|x^2 - 4x| = 5;$

$$2) \quad |x^2 + x| = 12;$$

3) $|x^2 + 5x| = 14;$

4) $|x^2 - 3x| = 10;$

5) $|x^2 + 7x| + 3 = 0;$

6) $|2x - x^2| + 9 = 0.$

5.159. 1) $|x^2 + 8x + 2| = 11;$

$$2) \quad |x^2 - 7x + 13| = 1;$$

3) $|3x^2 - 5x + 6| = 4;$

4) $|5x^2 - 17x + 15| = 3;$

5) $|-6x^2 + 7x - 1| = 1;$

6) $|-2x^2 + 7x + 5| = 5.$

5.160. 1) $|7x^2 - 3x - 2| = -11;$

$$2) \quad |9x^2 + 7x - 4| = -13;$$

3) $|4x^2 + x - 14| = -x^2 - 10;$

$$4) \left| 5x^2 - 15x - 9 \right| = -7x^2 - 9;$$

$$5) \left| 3x^2 - 10x + 3 \right| = \frac{1}{-2,8 - 7x^2};$$

$$6) \left| 2x^2 - 7x - 1 \right| = \frac{1}{-9.6x^2 - 8};$$

7) $|x^2 - 4x - 5| = -x^2;$

8) $|x^2 - 2x - 15| = -x^2$.

5.161. 1) $x^2 = |5x - 6|;$

$$2) \quad 6x^2 = |5x - 1|;$$

3) $25x^2 + 15x + 4 = 2|10x + 3|;$

4) $3x^2 - 4x - 3 = |3x - 7|;$

$$5) \quad 32x^2 - 72x + 11 = |43 - 24x|;$$

6) $7x^2 - 3x - 1 = 3|1 - 2x|$.

5.162. 1) $|x^2 - 1| = |x + 5|$;

2) $|x - 6| = |x^2 - 5x + 9|$;

3) $|x + 3| = |2x^2 + 6x - 3|$;

4) $|3x^2 - 6x - 1| = |6 - x|$;

5) $3|2x^2 + 4x + 3| = |x^2 + 11 + 5x|$;

6) $|2x^2 - 1| = |x^2 - 2x - 3|$.

5.163. 1) $|x - 5| + |x^2 - 25| = 0$;

2) $|x + 2| + |x^2 - 4| = 0$;

3) $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$;

4) $|x - 6| + |x^2 - 36| = 0$;

5) $|x + 6| - |x^2 - 36| = 0$;

6) $|x + 5| - |x^2 - 25| = 0$;

7) $|x + 2| - |x^2 - 4| = 0$;

8) $|x - 1| - |x^2 - 1| = 0$.

5.164. 1) $x^2 + 2|x| - 63 = 0$;

2) $x^2 + 18|x| + 65 = 0$;

3) $\frac{1}{5}x^2 + |x| - 10 = 0$;

4) $\frac{1}{4}x^2 - |x| - 3 = 0$;

5) $3x^2 - 4|x| + 1 = 0$;

6) $7x^2 - 12|x| + 5 = 0$.

5.165*. 1) $x^2 - 5x + \frac{6|x|}{x} = 0$;

2) $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} - 6 = 0$;

3) $2x^2 + x - \frac{|x|}{x} = 0$;

4) $2x^2 - 5x - \frac{3|x|}{x} = 0$;

5) $2x^2 + 8x - \frac{11x}{|x|} = 0$;

6) $9x^2 + 8x + \frac{6x}{|x|} = 0$.

5.166*. 1) $x^2 + (\sqrt{x - 2})^2 - 5 = 0$;

2) $x^2 - (\sqrt{x + 3})^2 - 8 = 0$;

3) $x^2 - 3x + \frac{4 - x}{|x - 4|} = 0$;

4) $x^2 - 4x \cdot \frac{|x - 10|}{x - 10} + 2 = 0$.

Глава 6

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

6.1. Функция $y = x^2$

Рассмотрим функцию, заданную формулой

$$y = x^2$$

на множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел.

На основании определения функции каждому значению аргумента x из области определения $\mathbf{R}$, т. е. каждому действительному числу, ставится в соответствие значение функции y , равное квадрату числа x .

Например, при $x = 7$ значение функции $y = 7^2 = 49$; при $x = -11$ значение функции $y = (-11)^2 = 121$.

Изобразим график функции $y = x^2$. Для этого придадим несколько значений аргументу, вычислим соответствующие значения функции и внесем их в таблицу.

x	0	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2	$\pm 2,5$	± 3
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Изобразим точки $(x; y)$ с указанными координатами на плоскости (рис. 50). Соединим эти точки плавной непрерывной кривой (рис. 51). Эту кривую можно рассматривать как изображение графика функции $y = x^2$.

График функции $y = x^2$ называется **параболой**. Говорят «парабола $y = x^2$ ».

Изображение параболы позволяет наглядно представить ее свойства.

На рисунке 51 видно, что парабола $y = x^2$ имеет единственную общую точку с осями координат — это точка $(0; 0)$ — начало координат.

Остальные точки параболы лежат над осью абсцисс в I и II координатных углах (четвертях). Значит, функция $y = x^2$ принимает положительные значения во всех точках $x \neq 0$. Таким образом, значение функции $y = 0$ — наименьшее. Функция

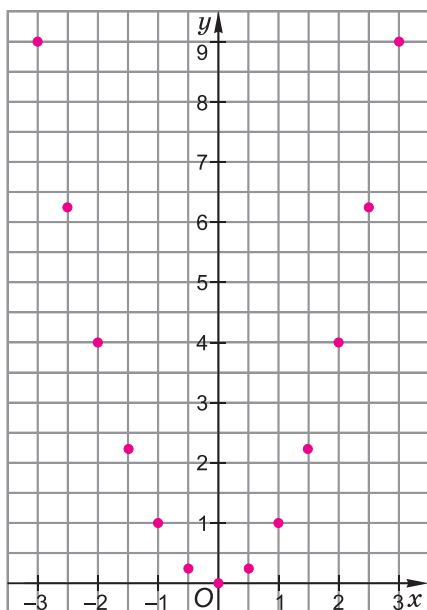


Рис. 50

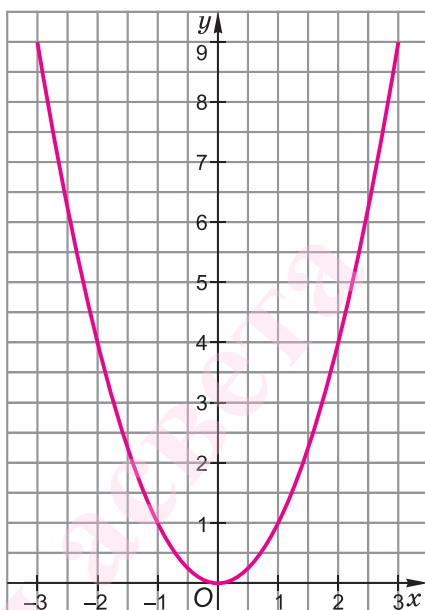


Рис. 51

принимает его в точке $x = 0$. Наибольшего значения функция не имеет.

Нетрудно заметить, что **парабола $y = x^2$ симметрична относительно оси ординат.**

Точка, в которой парабола пересекается со своей осью симметрии, называется **вершиной параболы.**

Вершиной параболы $y = x^2$ является точка $(0; 0)$.

Парабола $y = x^2$ делится осью симметрии на две части; они называются **ветвями параболы.** Принято говорить: «**ветви параболы $y = x^2$ направлены вверх.**»



1. Как называется график функции $y = x^2$?
2. Назовите общую точку параболы и осей координат.
3. В каких координатных углах лежит парабола $y = x^2$?
4. В каких точках функция $y = x^2$ принимает значение:
 - а) $y = 0$; б) $y > 0$; в) $y < 0$?
5. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = x^2$?
6. Что называется:
 - а) вершиной параболы $y = x^2$;
 - б) ветвями параболы?

Упражнения

6.1°. Функция задана формулой $y = x^2$. Сравните значения функции при значениях аргумента, равных:

- | | | |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) -3 и -2 ; | 2) -4 и -5 ; | 3) -2 и 2 ; |
| 4) 6 и -6 ; | 5) $2\frac{3}{4}$ и $2\frac{4}{9}$; | 6) $3\frac{2}{3}$ и $3\frac{1}{5}$; |
| 7) $-37,4$ и 0 ; | 8) 2 и $-49,7$; | 9) $28,7$ и 0 ; |
| 10) -1 и 5 ; | 11) -3 и 7 ; | 12) 12 и -8 . |

6.2°. При каких значениях аргумента значение функции, заданной формулой $y = x^2$, равно:

- | | | |
|-------------|---------------------|-------------|
| 1) 9 ; | 2) $\frac{1}{25}$; | 3) $0,49$; |
| 4) $1,21$; | 5) 625 ; | 6) 256 ? |

6.3°. Принадлежит ли точка графику функции $y = x^2$:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $A(7; 49)$; | 2) $B(10; 100)$; |
| 3) $C(-8; -64)$; | 4) $D(3; -9)$; |
| 5) $M(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$; | 6) $N(-\frac{2}{7}; \frac{4}{49})$; |
| 7) $K(6; \sqrt{6})$; | 8) $L(\sqrt{11}; 11)$; |
| 9) $P(-1\frac{1}{3}; 1\frac{7}{9})$; | 10) $Q(-1\frac{2}{7}; 1\frac{32}{49})$? |

6.4°. Укажите координаты точки, симметричной относительно оси Oy точке:

- | | | |
|------------------------|--------------------------|------------------|
| 1) $A(1; -1)$; | 2) $B(-2; 4)$; | 3) $C(-9; 81)$; |
| 4) $D(\sqrt{7}; -7)$; | 5) $M(-\sqrt{11}; 11)$; | 6) $N(2,4; 0)$. |

Какие из этих точек принадлежат параболе $y = x^2$?

6.5°. Принадлежат ли графику функции $y = x^2$ точки:

- | |
|---|
| 1) $A(-6; 36)$ и $B(6; 36)$; |
| 2) $C(10; 100)$ и $D(-10; 100)$; |
| 3) $M(-9; 3)$ и $N(9; 3)$; |
| 4) $E(\sqrt{5}; -5)$ и $F(-\sqrt{5}; -5)$; |
| 5) $K(\sqrt{3} - 1; 4 - 2\sqrt{3})$ и $T(1 - \sqrt{3}; 4 - 2\sqrt{3})$; |
| 6) $L(\sqrt{2} + \sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{6})$ и $Q(-\sqrt{2} - \sqrt{3}; 5 + 2\sqrt{6})$? |

- 6.6. Укажите абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ с прямой:
- 1) $y = 4$; 2) $y = 9$; 3) $y = 121$;
4) $y = \sqrt{13}$; 5) $y = \sqrt{21}$; 6) $y = \sqrt{48}$.
- 6.7. Имеет ли график функции $y = x^2$ общие точки с прямой:
- 1) $y = 124,5$; 2) $y = 302,7$; 3) $y = -12,9$;
4) $y = -37,6$; 5) $y = 0$; 6) $y = 0,0001$?
- 6.8. Изобразите график функции, заданной следующей формулой, и укажите для этой функции:
- а) координаты общих точек ее графика и координатных осей;
б) в каких координатных углах лежит ее график;
в) при каких значениях x она принимает значение $y = 0$;
г) при каких значениях x она принимает значения $y > 0$;
д) при каких значениях x она принимает значения $y < 0$;
е) уравнение оси симметрии (если они есть) ее графика:
- 1) $y = x(x + 8) - 8x$; 2) $y = 9x - x(9 - x)$;
3) $y = (x - 1)(x + 1) - 1$; 4) $y = 100 - (10 - x)(x + 10)$;
5) $y = (x + 3)^2 - 3(2x + 3)$; 6) $y = (x - 5)^2 - 5(5 - 2x)$.
- 6.9. Используя график функции $y = x^2$, определите, при каких значениях x значения функции:
- 1) меньше 4; 2) больше 9;
3) больше 0; 4) меньше 1.

6.2. Функция $y = ax^2$

Определение. Квадратичной (квадратной) функцией называется функция вида

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ — числа, } a \neq 0)$$

с областью определения — множеством R всех действительных чисел.

Функция $y = x^2$ является частным случаем квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

График квадратичной функции (как и график функции $y = x^2$) называется *параболой*, а уравнение $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) — *уравнением* этой параболы.

График квадратичной функции и ее свойства мы будем изучать, используя график и свойства функции $y = x^2$.

При $a \neq 1$, $b = 0$, $c = 0$ имеем еще один частный случай квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, т. е. функцию

$$y = ax^2 \quad (a \neq 0, a \neq 1).$$

Пусть $a > 0$. Приведем два примера функции $y = ax^2$: при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = 2x^2$ (здесь $a = 2 > 1$). Составим таблицу значений этой функции и сравним ее с таблицей значений функции $y = x^2$.

x	0	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2
$y = x^2$	0	0,25	1	2,25	4
$y = 2x^2$	0	0,5	2	4,5	8

Воспользовавшись таблицей, изобразим на одном рисунке параболы $y = x^2$ и $y = 2x^2$ (рис. 52).

Очевидно, что при каждом значении x значение функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше значения функции $y = x^2$. Значит, при одной и той же абсциссе x_0 ордината точки M на параболе $y = 2x^2$ в 2 раза больше ординаты точки N на параболе $y = x^2$ (рис. 53). Поэтому любую точку M на параболе $y = 2x^2$ можно получить из соответствующей точки N на параболе $y = x^2$, увеличив ее ординату в 2 раза.

Говорят, что парабола $y = 2x^2$ получается из параболы $y = x^2$ *растяжением в 2 раза вдоль оси Oy* . Заметим, что при растяжении параболы $y = x^2$ вдоль оси Oy ее вершина является неподвижной точкой (поясните почему).

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}x^2$ (здесь $a = \frac{1}{2} < 1$). Составим та-

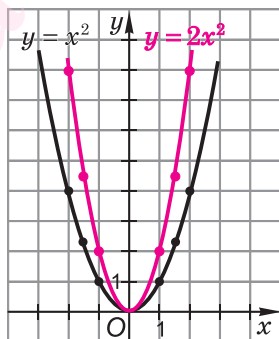


Рис. 52

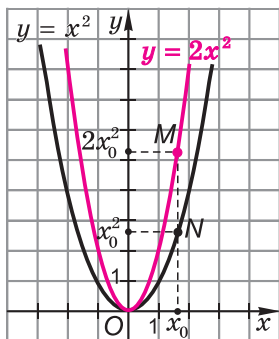


Рис. 53

блицу значений этой функции и сравним ее с таблицей значений функции $y = x^2$.

x	0	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2
$y = x^2$	0	0,25	1	2,25	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	0	0,125	0,5	1,125	2

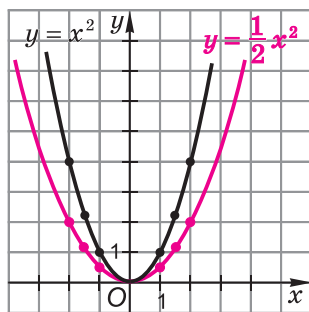


Рис. 54

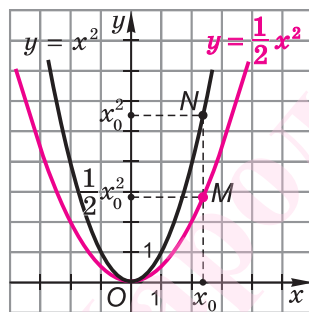


Рис. 55

Воспользовавшись таблицей, изобразим на одном рисунке параболы $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 54).

Очевидно, что при каждом значении x значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в 2 раза меньше значения функции $y = x^2$. Значит, при одной и той же абсциссе x_0 ордината точки M на параболе $y = \frac{1}{2}x^2$ в 2 раза меньше ординаты точки N на параболе $y = x^2$ (рис. 55). Поэтому любую точку M на параболе $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из соответствующей точки N на параболе $y = x^2$, уменьшив ее ординату в 2 раза.

Говорят, что парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ получается из параболы $y = x^2$ **сжатием в 2 раза вдоль оси Oy** . Заметим, что при сжатии параболы $y = x^2$

вдоль оси Oy ее вершина является неподвижной точкой (поясните почему).

Вообще,



если $a > 1$, то парабола $y = ax^2$ получается из параболы $y = x^2$ **растяжением в a раз вдоль оси Oy** ;
если $0 < a < 1$, то парабола $y = ax^2$ получается из параболы $y = x^2$ **сжатием в $\frac{1}{a}$ раз вдоль оси Oy** .

Функция $y = ax^2$ ($a > 0$) обладает теми же свойствами, что и функция $y = x^2$ (см. п. 6.1), и устанавливаются они так же, как для функции $y = x^2$.

Рассмотрим функцию $y = ax^2$ при $a < 0$.

В качестве примера приведем функцию $y = -2x^2$. Сравним ее с функцией $y = 2x^2$, которую мы уже изучили.

Заметим, что графики функций $y = -2x^2$ и $y = 2x^2$ симметричны относительно оси Ox (рис. 56).

Вообще, парабола $y = ax^2$ ($a < 0$) симметрична параболе $y = |a|x^2$ относительно оси Ox (рис. 57). Из этой симметрии следуют свойства функции $y = ax^2$ ($a < 0$). Например, эта парабола симметрична относительно оси ординат.

Таким образом, для параболы $y = ax^2$ при любом $a \neq 0$ ось Oy является осью симметрии.

Точка, в которой график квадратичной функции — парабола — пересекается со своей осью симметрии, называется **вершиной параболы**.

Вершиной параболы $y = ax^2$ ($a \neq 0$) является начало координат.

Если $a > 0$, то ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх, а если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

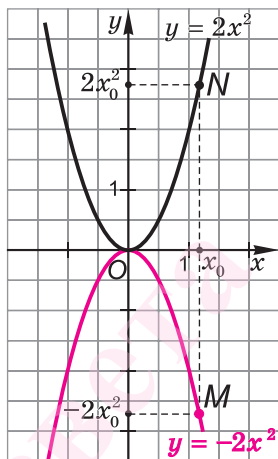


Рис. 56

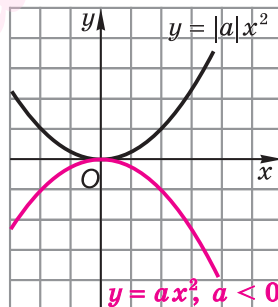


Рис. 57



1. Какая функция называется квадратичной?
2. Как называется график квадратичной функции?
3. Как получается парабола $y = ax^2$ из параболы $y = x^2$, если:
 - а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$?
4. Какая прямая является осью симметрии параболы $y = ax^2$?
5. Какая точка является вершиной параболы $y = ax^2$?
6. Сформулируйте и проиллюстрируйте на рисунке свойства функции $y = ax^2$ при:
 - а) $a > 0$; б) $a < 0$.

Упражнения

- 6.10°.** Даны функции: $y = \frac{1}{4}x^2$; $y = x^2$; $y = 4x^2$. Изобразите на одном чертеже их графики и укажите свойства.
- 6.11°.** Верно ли, что графику функции $y = 4x^2$ принадлежит точка:
- 1) $A(-1; -4)$; 2) $B(0,5; 2)$;
3) $C(0,1; 0,4)$; 4) $D(-2; 16)$?
- 6.12°.** Найдите координаты общих точек (если они есть) параболы $y = 4x^2$ и прямой:
- 1) $y = 4$; 2) $y = 64$; 3) $y = \frac{1}{9}$;
4) $y = \frac{1}{49}$; 5) $y = -25$; 6) $y = -16$.
- 6.13°.** Найдите координаты общих точек (если они есть) параболы $y = -\frac{1}{6}x^2$ и прямой:
- 1) $y = -6$; 2) $y = -24$; 3) $y = -\frac{1}{54}$;
4) $y = -\frac{1}{150}$; 5) $y = \frac{1}{6}$; 6) $y = 6$.
- 6.14.** Изобразите график функции и укажите ее свойства:
- 1) $y = 2(x + 4)^2 - 16(x + 2)$;
2) $y = 3(1 - 2x) - 3(x - 1)^2$;
3) $y = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2 \left(3 + \frac{1}{2}x\right) + 9$;
4) $y = 0,1(5 - 2x)(5 + 2x) - 2,5$.
- 6.15.** Найдите значение a , если известно, что парабола $y = ax^2$ проходит через точку:
- 1) $(1; 5)$; 2) $(2; 16)$; 3) $(0; 0)$;
4) $(3; 1)$; 5) $(-2; 1)$; 6) $(-5; 125)$.
- 6.16.** Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y = 2x^2$:
- 1) растяжением в 2 раза вдоль оси Oy ;
2) растяжением в 4 раза вдоль оси Oy ;
3) сжатием в 4 раза вдоль оси Oy ;
4) сжатием в 2 раза вдоль оси Oy .

6.17°. На рисунке 58 изображен график функции $y = ax^2$. Укажите значение a .

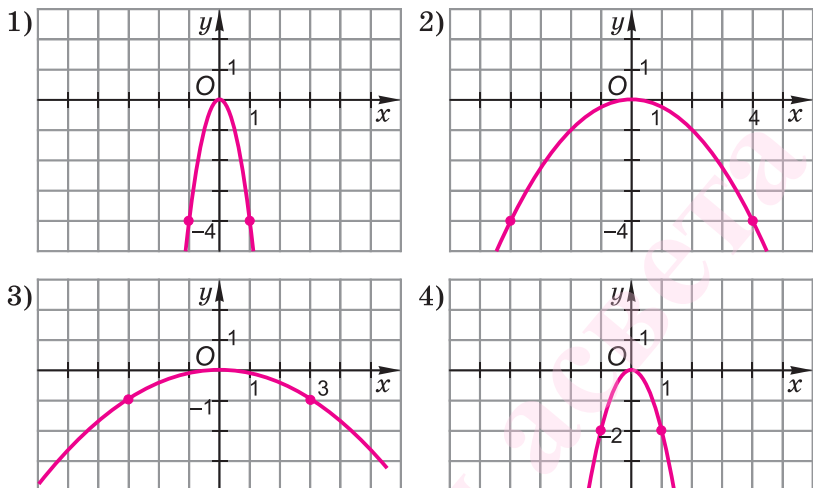


Рис. 58

6.18. Для функции $y = 3x^2$ определите, при каких значениях x значения функции:

- 1) меньше 3; 2) больше 3;
- 3) больше 0; 4) меньше 0.

6.19. Для функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ определите, при каких значениях x значение функции:

- 1) меньше -8; 2) больше $-\frac{1}{8}$;
- 3) больше $-\frac{1}{2}$; 4) меньше 0.

6.20. При каких значениях p графиком функции $y = (p - 2)x^2$ является:

- 1) парабола; 2) прямая?

6.21*. Площадь поверхности куба (в квадратных сантиметрах) зависит от длины ребра x (в сантиметрах). Задайте формулой эту функцию. Постройте ее график.

6.22*. Изобразите график функции:

1) $y = 3x|x|$, $x \geq 0$;

2) $y = \frac{1}{3}x|x|$, $x \leq 0$;

3) $y = -0,5x|x|$, $x \leq 0$;

4) $y = -0,25x|x|$, $x \leq 0$.

6.3. Функция $y = ax^2 + c$

Рассмотрим частный случай квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ при $b = 0$, т. е.

$$y = ax^2 + c \quad (a \neq 0, c \neq 0).$$

Приведем четыре примера с различными комбинациями знаков чисел a и c .

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ (здесь $a = \frac{1}{2} > 0$, $c = 3 > 0$). Сравним ее с функцией $y = \frac{1}{2}x^2$. При каждом значении x значение функции $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ больше значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы. Следовательно, каждая точка M параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ получается из соответствующей точки N параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом на 3 единицы вверх

вдоль оси Oy (рис. 59), т. е. парабола $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ получается из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом на 3 единицы вверх вдоль оси Oy . Поэтому осью симметрии параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ так же, как и параболы $y = \frac{1}{2}x^2$, является ось Oy (ее уравнение $x = 0$).

С осью Ox парабола $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ не пересекается, а с осью Oy имеет единственную общую точку $(0; 3)$.

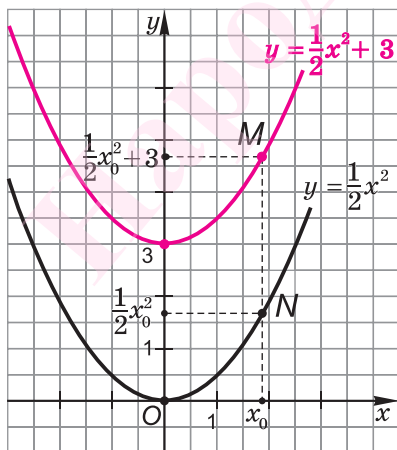


Рис. 59

Вершина рассматриваемой параболы — точка $(0; 3)$; она получается из точки $(0; 0)$ — вершины параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ — сдвигом на 3 единицы вверх вдоль оси Oy .

Ветви параболы $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ направлены вверх.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ (здесь $a = \frac{1}{2} > 0$, $c = -3 < 0$). Сравним ее с функцией $y = \frac{1}{2}x^2$. При каждом значении x значение функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ меньше значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы. Следовательно, каждая точка M параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ получается из соответствующей точки N параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ сдви-

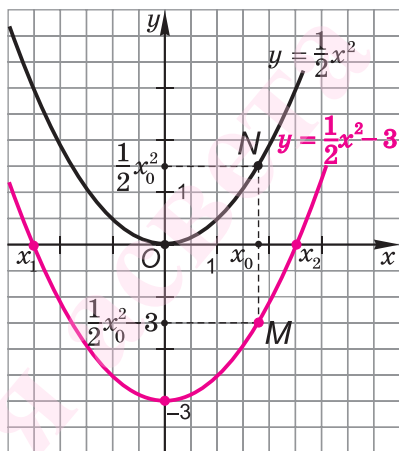


Рис. 60

гом на 3 единицы вниз вдоль оси Oy (рис. 60), т. е. парабола $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ получается из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом на 3 единицы вниз вдоль оси Oy . Поэтому осью симметрии параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ так же, как и параболы $y = \frac{1}{2}x^2$, является ось Oy .

В точках пересечения параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ с осью Ox значение функции $y = 0$; значит, абсциссы этих точек x_1 и x_2 являются корнями уравнения $0 = \frac{1}{2}x^2 - 3$, т. е. $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$. Таким образом, парабола пересекается с осью абсцисс в точках $(-\sqrt{6}; 0)$ и $(\sqrt{6}; 0)$. С осью ординат парабола пересекается в точке $(0; -3)$.

Вершина рассматриваемой параболы — точка $(0; -3)$; она получается из точки $(0; 0)$ — вершины параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ — сдвигом на 3 единицы вниз вдоль Oy .

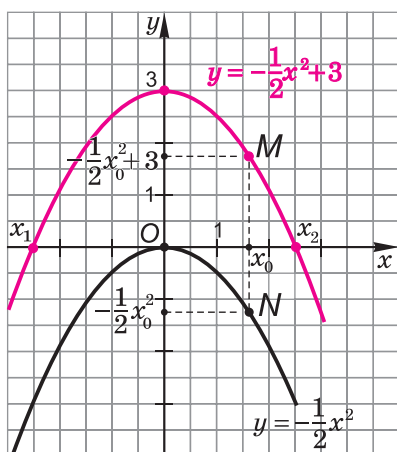


Рис. 61

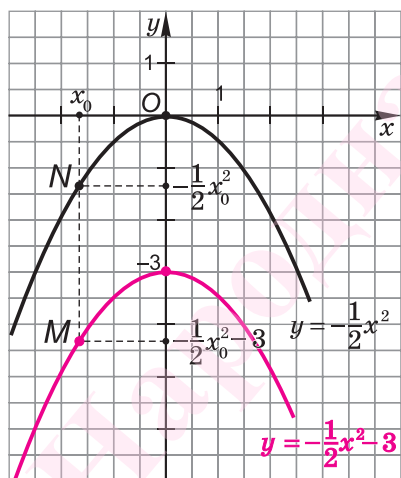


Рис. 62

Ветви параболы $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ направлены вверх.

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ (здесь $a = -\frac{1}{2} < 0$, $c = 3 > 0$). Сравним по аналогии с примером 1 график этой функции с параболой $y = -\frac{1}{2}x^2$. Мы видим, что парабола $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ получается сдвигом параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вверх вдоль оси Oy (рис. 61).

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ (здесь $a = -\frac{1}{2} < 0$, $c = -3 < 0$). Сравним по аналогии с примером 2 график этой функции с параболой $y = -\frac{1}{2}x^2$. Мы видим, что парабола $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ получается сдвигом параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$ на 3 единицы вниз вдоль оси Oy (рис. 62).

Примеры 1—4 показывают, что:



парабола $y = ax^2 + c$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль оси Oy :
на c единиц вверх при $c > 0$ и на $|c|$ единиц вниз при $c < 0$.



1. Каким преобразованием можно получить параболу $y = ax^2 + c$ из параболы $y = ax^2$?
2. Для каждой из функций в примерах 3 и 4 назовите свойства а)–д):
 - а) координаты вершины параболы;
 - б) уравнение оси симметрии параболы;
 - в) направление ветвей параболы;
 - г) координаты точек пересечения параболы с осью Ox ;
 - д) координаты точки пересечения параболы с осью Oy .
3. Назовите для параболы $y = ax^2 + c$ свойства а)–д) при $a > 0$, при $a < 0$.

Упражнения

6.23°. Изобразите график функции, заданной формулой, и укажите ее свойства:

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$; | 2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 4$; |
| 3) $y = 3x^2 + 1$; | 4) $y = 3x^2 - 1$; |
| 5) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$; | 6) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$; |
| 7) $y = -4x^2 - 2$; | 8) $y = -4x^2 + 2$. |

6.24°. Как из графика функции $y = 2x^2$ можно получить график функции:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) $y = 2x^2 + 1$; | 2) $y = 2x^2 - 1$; |
| 3) $y = -6 + 2x^2$; | 4) $y = 2x^2 + 9$? |

6.25°. Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y = 7x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) 3 единицы вверх; | 2) 5 единиц вниз; |
| 3) 7 единиц вниз; | 4) 4 единицы вверх; |
| 5) 2,1 единицы вниз; | 6) 8,4 единицы вниз; |
| 7) 0,9 единицы вверх; | 8) 0,3 единицы вверх. |

6.26°. Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y = -3,2x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) 6 единиц вверх; | 2) 4,6 единицы вниз; |
| 3) 2,4 единицы вниз; | 4) 7 единиц вверх. |

6.27°. Как надо преобразовать параболу $y = -0,73x^2$, чтобы уравнение полученной параболы имело вид:

1) $y = -0,73x^2 + 6$;

2) $y = -0,73x^2 - 27$;

3) $y = -0,73x^2 - \sqrt{3}$;

4) $y = -0,73x^2 + \sqrt{5}$?

6.28. Как надо преобразовать параболу $y = x^2$, чтобы уравнение полученной параболы имело вид:

1) $y = -7x^2 + 3$;

2) $y = 5x^2 - 6$;

3) $y = \frac{1}{4}x^2 - (\sqrt{5})^2$;

4) $y = \frac{1}{9}x^2 + (\sqrt{7})^4$?

6.29. Найдите координаты точек пересечения параболы и прямой:

1) $y = 1 - x^2$ и $y = -8$;

2) $y = x^2 - 4$ и $y = 5$;

3) $y = x^2 + 2$ и $y = 4x - 3$;

4) $y = 6x^2 - 1$ и $y = 5x$;

5) $y = 5x^2 + 1$ и $y = 6x$;

6) $y = 2x^2 - 1$ и $y = x - 4$;

7) $y = 8x^2 - 1$ и $y = -3 - 8x$;

8) $y = \frac{1}{9}x^2 + 1$ и $y = -\frac{2}{3}x$.

6.30. Имеет ли параболу $y = 6x^2 - 1$ общие точки с прямой:

1) $y = 8$;

2) $y = 0$;

3) $y = 1$;

4) $y = -1$;

5) $y = -10$;

6) $y = -3$?

Если да, то найдите их координаты.

6.31. Имеет ли параболу $y = -3x^2 + 2$ общие точки с прямой:

1) $y = 0$;

2) $y = 2$;

3) $y = 9$;

4) $y = -1$;

5) $y = -10$;

6) $y = 1,025$?

Если да, то найдите их координаты.

6.32°. Укажите координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 3$;

2) $y = x^2 + 4$;

3) $y = \frac{1}{12}x^2 + 1,5$;

4) $y = \frac{7}{9}x^2 - 3,2$;

5) $y = -0,6x^2 - 4\frac{1}{8}$;

6) $y = -2,1x^2 + 8\frac{1}{3}$.

6.33°. Укажите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = x^2 - 1$ и $y = 3$;

2) $y = x^2 + 3$ и $y = 4$;

3) $y = -x^2 - 6$ и $y = -10$;

4) $y = -x^2 + 7$ и $y = -9$;

5) $y = \frac{1}{3}x^2 + 6$ и $y = 9$;

6) $y = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}$ и $y = -1\frac{3}{5}$.

6.34. Используя изображение параболы на рисунке 63, дайте формулой ее уравнение.

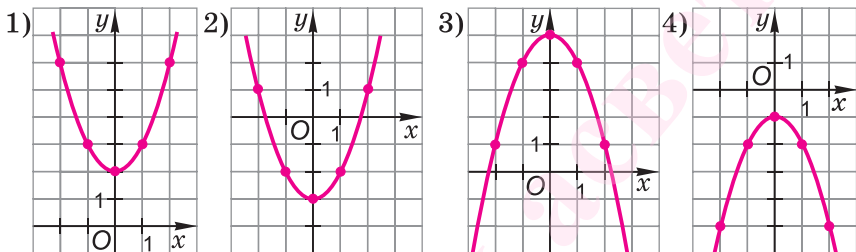


Рис. 63

6.35. Для каждой квадратичной функции из упражнения 6.34 укажите:

- координаты вершины параболы;
- уравнение оси симметрии параболы;
- направление ветвей параболы;
- координаты точек пересечения параболы с осью Ox ;
- координаты точки пересечения параболы с осью Oy .

6.36. При каких значениях p парабола $y = x^2 + p$ проходит через точку:

1) $A(0; -3)$;

2) $B(-4; 17)$;

3) $K(\frac{1}{2}; \frac{1}{6})$;

4) $M(-0,5; -6,45)$?

6.37*. Изобразите график функции:

1) $y = 2x|x| + 1, x \leq 0$;

2) $y = \frac{1}{4}x|x| - 2, x \geq 0$;

3) $y = -3x|x| + 3, x \geq 0$;

4) $y = -\frac{1}{2}x|x| - 1, x \leq 0$.

6.4. Функция $y = a(x - s)^2$

Рассмотрим функцию $y = a(x - s)^2$, где $a \neq 0$, $s \neq 0$.

Приведем четыре примера с различными комбинациями знаков чисел a и s .

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ (здесь $a = \frac{1}{2} > 0$; $s = 3 > 0$).

Воспользовавшись таблицей, изобразим на одном рисунке график этой функции и график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 64).

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	2	$3\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	8
$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$	8	$6\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	2	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

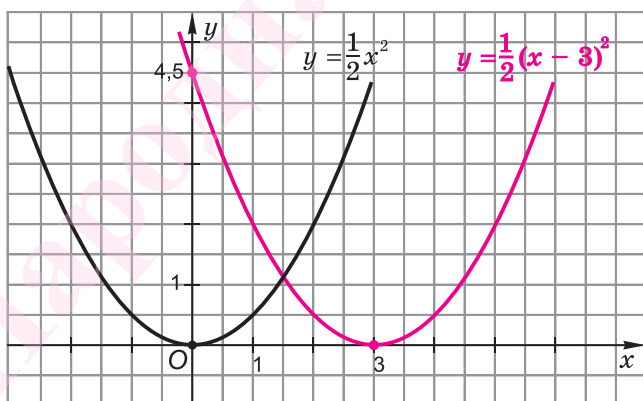


Рис. 64

Если внимательно посмотреть на рисунок, то связь между графиками функций становится очевидной: парабола $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ сдвинута относительно параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 еди-

ницы вправо вдоль оси Ox . Значит, ось симметрии параболы $y = \frac{1}{2}(x-3)^2$ — это прямая $x=3$, она параллельна оси Oy и проходит через точку $(3; 0)$.

Итак, по изображению параболы можно увидеть, что:

- а) точка $(3; 0)$ — вершина параболы;
- б) $x=3$ — уравнение оси симметрии параболы;
- в) ветви параболы направлены вверх;
- г) точка $(3; 0)$ — точка пересечения параболы с осью Ox ;
- д) точка $(0; 4,5)$ — точка пересечения параболы с осью Oy .

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$ (здесь $a = \frac{1}{3} > 0$; $s = -2 < 0$).

Используя таблицу, изобразим на одном рисунке график этой функции и график функции $y = \frac{1}{3}x^2$ (рис. 65).

x	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \frac{1}{3}x^2$	$4\frac{1}{12}$	3	$2\frac{1}{12}$	$1\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}(x+2)^2$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{12}$	3

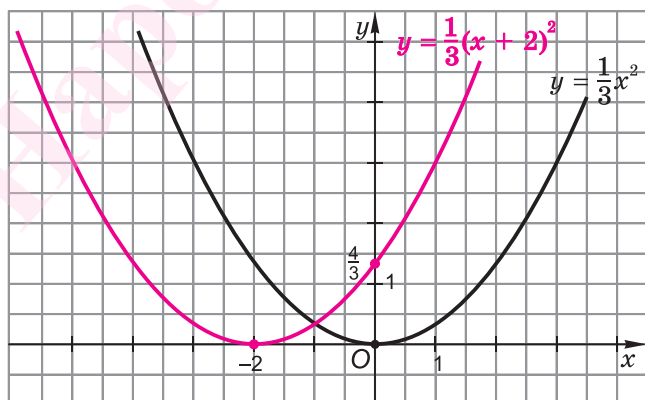


Рис. 65

По рисунку легко заметить, что парабола $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$ сдвинута относительно параболы $y = \frac{1}{3}x^2$ на 2 единицы влево вдоль оси Ox .

По изображению параболы $y = \frac{1}{3}(x+2)^2$ на рисунке 65 можно увидеть, что:

- а) точка $(-2; 0)$ — вершина параболы;
- б) $x = -2$ — уравнение оси симметрии параболы;
- в) ветви параболы направлены вверх;
- г) точка $(-2; 0)$ — точка пересечения параболы с осью Ox ;
- д) точка $(0; \frac{1}{3})$ — точка пересечения параболы с осью Oy .

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$ (здесь $a = -\frac{1}{3} < 0$; $s = \frac{3}{2} > 0$).

Изобразив на одном рисунке графики функций $y = -\frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$, можно увидеть, что парабола $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$ сдвинута относительно параболы $y = -\frac{1}{3}x^2$ на $\frac{3}{2}$ единицы вправо вдоль оси Ox .

По изображению параболы $y = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})^2$ на рисунке 66 можно указать также, что:

- а) точка $(\frac{3}{2}; 0)$ — вершина параболы;
- б) $x = \frac{3}{2}$ — уравнение оси симметрии параболы;

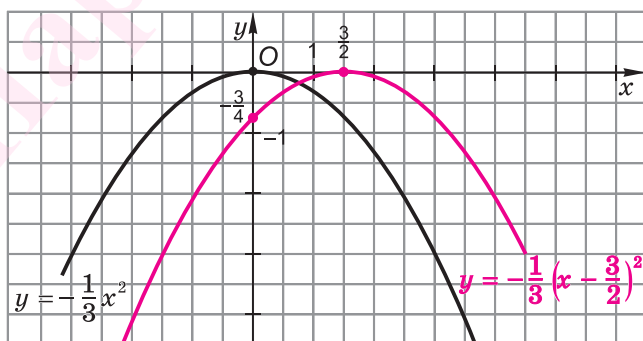


Рис. 66

в) ветви параболы направлены вниз;

г) точка $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ — точка пересечения параболы с осью Ox ;

д) точка $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$ — точка пересечения параболы с осью Oy .

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ (здесь $a = -\frac{1}{3} < 0$; $s = -\frac{3}{2} < 0$).

Изобразив на одном рисунке графики функций $y = -\frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$, можно увидеть, что парабола $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ сдвинута относительно параболы $y = -\frac{1}{3}x^2$ на $\frac{3}{2}$ единицы влево вдоль оси Ox .

По изображению параболы $y = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ на рисунке 67 сформулируйте свойства соответствующей функции самостоятельно.

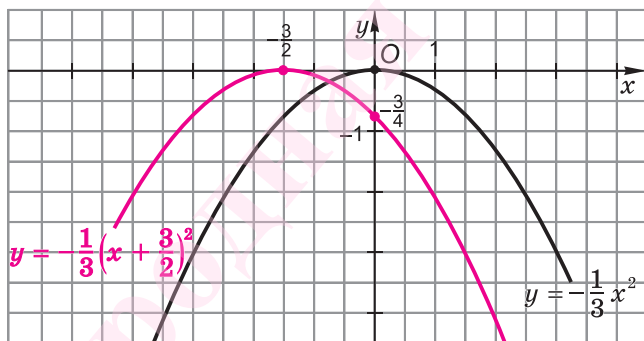


Рис. 67

Примеры 1—4 показывают, что



парабола $y = a(x - s)^2$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль оси Ox :
на s единиц вправо при $s > 0$ и на $|s|$ единиц влево при $s < 0$.



1. Каким преобразованием можно получить параболу $y = a(x - s)^2$ из параболы $y = ax^2$?
- 2*. Назовите для параболы $y = a(x - s)^2$ свойства а)—д) (см. примеры 1—3 этого пункта) при $a > 0$, при $a < 0$.

Упражнения

6.38°. Изобразите график функции, заданной формулой, и укажите ее свойства:

1) $y = (x - 1)^2$;

2) $y = (x + 2)^2$;

3) $y = -2(x + 4)^2$;

4) $y = -\frac{5}{4}(x - 4)^2$;

5) $y = \frac{7}{3}(x - 3)^2$;

6) $y = -\frac{1}{5}(x + 5)^2$.

6.39. Как из графика функции $y = 5x^2$ можно получить график функции:

1)° $y = 5(x - 3)^2$;

2)° $y = 5(x + 7)^2$;

3) $y = 5x^2 - 50x + 125$;

4) $y = 5x^2 - 20x + 20$;

5) $y = 5x^2 + 10\sqrt{7}x + 35$;

6) $y = 5x^2 + 10\sqrt{3}x + 15$?

6.40°. Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y = 2,3x^2$ сдвигом вдоль оси Ox на:

1) 4 единицы влево;

2) 5 единиц вправо;

3) 0,7 единицы вправо;

4) 2,3 единицы влево.

6.41°. Какими преобразованиями из параболы $y = -0,4x^2$ можно получить параболу:

1) $y = -0,4(x - 2)^2$;

2) $y = -0,4(x + 6,8)^2$;

3) $y = -0,4(x + 7,3)^2$;

4) $y = -0,4(x - 9)^2$?

6.42°. Какими преобразованиями из параболы $y = 27x^2$ можно получить параболу:

1) $y = 27(x - 9^2)^2$;

2) $y = 27(x - 67^0)^2$;

3) $y = 27(x + 53^0)^2$;

4) $y = 27(x + 3^4)^2$?

6.43°. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = (2 + x)^2$ и $y = 4$;

2) $y = (x - 4)^2$ и $y = 9$;

3) $y = (4x - 5)^2$ и $y = 8x + 25$;

4) $y = (3 - 8x)^2$ и $y = 9 + 16x$.

6.44°. Укажите координаты вершины параболы:

- 1) $y = -9\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$; 2) $y = 2,4(x - 2,5)^2$;
 3) $y = \frac{3}{8}(4 + x)^2$; 4) $y = -\frac{9}{11}(x + 0,8)^2$;
 5) $y = x^2 - 4x + 4$; 6) $y = x^2 + 25 - 10x$.

6.45. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 68.

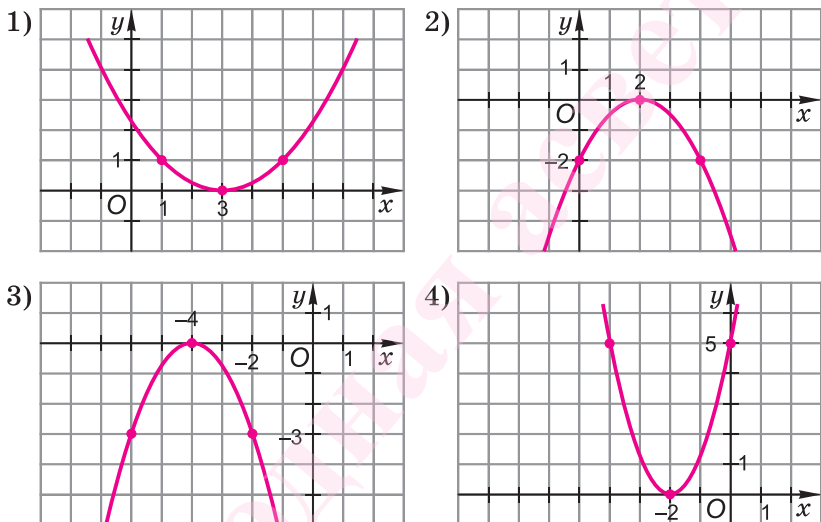


Рис. 68

6.46°. Дана функция $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$. Принадлежит ли графику функции точка:

- 1) $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 2) $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;
 3) $C(3,5; 9)$; 4) $K(-7,5; -49)$?

6.47°. Запишите уравнение оси симметрии параболы:

- 1) $y = p(x + 5)^2$; 2) $y = px^2 - 4$;
 3) $y = px^2 + \frac{3}{4}$; 4) $y = p(x + 1,8)^2$;
 5) $y = -(x + p)^2$; 6) $y = -x^2 + p$.

6.48. Верно ли, что при любом значении p график функции из упражнения 6.47 не имеет общих точек с прямой:

- а) $y = -374$; б) $y = 0$; в) $y = 128$?

6.49. При каком значении k графику функции $y = k(x + 5)^2$ принадлежит точка:

- 1) $(0; 5)$; 2) $(-7; 5)$; 3) $(7; -5)$;
4) $(7; 5)$; 5) $(\frac{1}{2}; 5)$; 6) $(0,5; -5)$?

6.50. На рисунке 69 изображена парабола $y = b(x + c)^2$. Определите знаки чисел b и c .

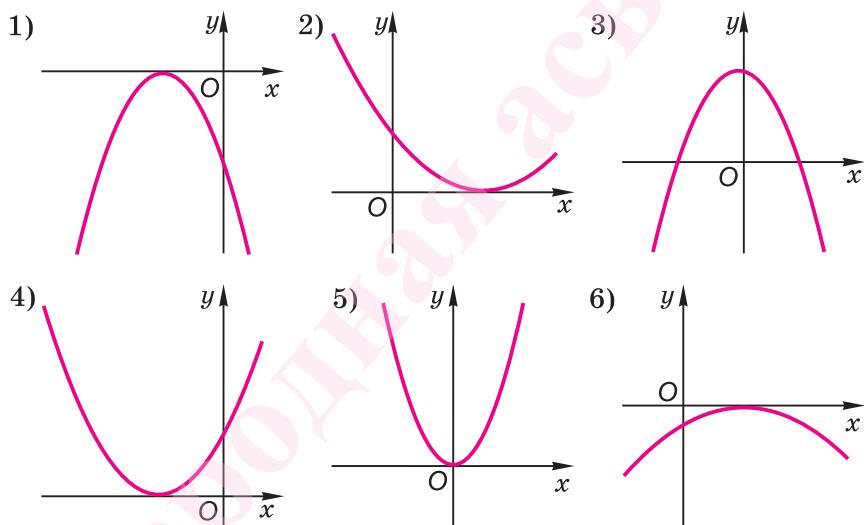


Рис. 69

6.5. Функция $y = a(x - s)^2 + t$

Рассмотрим функцию $y = a(x - s)^2 + t$, где $a \neq 0$, $s \neq 0$, $t \neq 0$. Приведем четыре примера такой функции.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$ (здесь $a = \frac{1}{2} > 0$; $s = 1 > 0$; $t = 3 > 0$).

Ее график можно получить из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ следующим образом. Сдвинем параболу $y = \frac{1}{2}x^2$ вдоль оси Ox на 1 единицу вправо. В результате получим параболу $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$. Теперь сдвинем эту параболу вдоль оси Oy на 3 единицы вверх и получим параболу $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ (рис. 70).

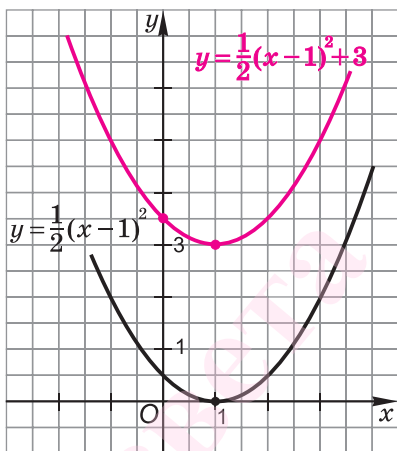


Рис. 70

По рисунку легко увидеть свойства соответствующей функции. Назовите самостоятельно:

- координаты вершины параболы;
- уравнение оси симметрии параболы;
- направление ветвей параболы;
- координаты точек пересечения параболы с осью Ox ;
- координаты точки пересечения параболы с осью Oy .

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ (здесь $a = \frac{1}{2} > 0$; $s = -1 < 0$; $t = -3 < 0$).

Ее график можно получить из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ следующим образом. Сдвинем параболу $y = \frac{1}{2}x^2$ вдоль оси Ox на 1 единицу влево. В результате получим параболу $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$. Теперь сдвинем эту параболу вдоль оси Oy на 3 единицы вниз вдоль оси Oy и получим параболу $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ (рис. 71).

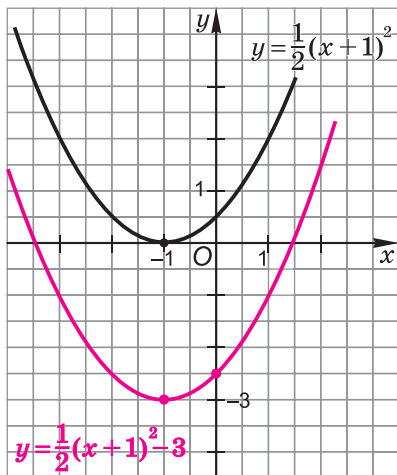


Рис. 71

Используя изображение параболы $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$, назовите для соответствующей функции свойства а)—д), перечисленные в примере 1.

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ (здесь $a = -\frac{1}{2} < 0$; $s = 1 > 0$; $t = 3 > 0$).

График этой функции получается из параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$ сдвигом на 1 единицу вправо вдоль оси Ox и на 3 единицы вверх вдоль оси Oy (рис. 72).

Используя изображение параболы $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$, назовите для соответствующей функции свойства а)—д), перечисленные в примере 1.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ (здесь $a = -\frac{1}{2} < 0$; $s = -1 < 0$; $t = -3 < 0$).

График этой функции получается из параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$ сдвигом на 1 единицу влево вдоль оси Ox и на 3 единицы вниз вдоль оси Oy (рис. 73).

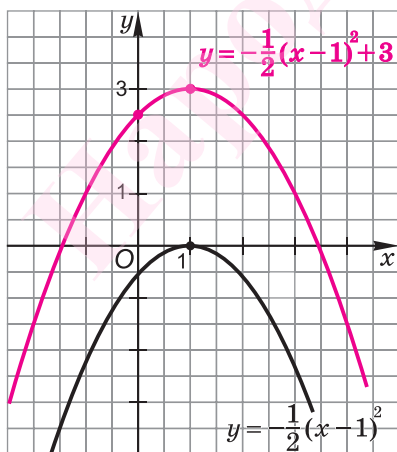


Рис. 72

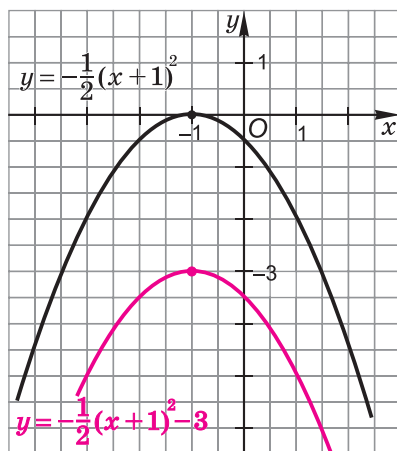


Рис. 73

Примеры 1—4 показывают следующее.



Парабола $y = a(x - s)^2 + t$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$: вдоль оси Ox на s единиц вправо при $s > 0$ и на $|s|$ единиц влево при $s < 0$;

вдоль оси Oy на t единиц вверх при $t > 0$ и на $|t|$ единиц вниз при $t < 0$.

Осью симметрии параболы $y = a(x - s)^2 + t$ является прямая $x = s$ (эта прямая параллельна оси Oy).

Ось симметрии пересекает параболу $y = a(x - s)^2 + t$ в точке $P(s; t)$. Эта точка является вершиной параболы. Ветви параболы $y = a(x - s)^2 + t$ направлены вверх, когда $a > 0$, и вниз, когда $a < 0$.

Пример 5. Пересекается ли парабола $y = -0,38(x + 4)^2 + 7$ с прямыми $y = -10,3$, $y = 17,3$ и $y = 0$?

Решение. Поскольку $a = -0,38 < 0$, то ветви параболы направлены вниз; вершина параболы — точка $(-4; 7)$; ось симметрии параболы — прямая $x = -4$.

Изобразив эту параболу (сделайте это), можно увидеть, что она пересекается с прямыми $y = -10,3$ и $y = 0$ и не имеет общих точек с прямой $y = 17,3$.



1. Каким преобразованием из параболы $y = ax^2$ можно получить параболу $y = a(x - s)^2 + t$?

2. Назовите для параболы $y = a(x - s)^2 + t$ свойства а)—д) (см. пример 1) при $a > 0$, при $a < 0$.

Упражнения

Какими преобразованиями из параболы $y = x^2$ можно получить данную параболу (6.51—6.52)?

6.51°. 1) $y = (x - 5)^2 + 1$; 2) $y = (x + 3)^2 - 4$;
3) $y = (x + 2)^2 - 7$; 4) $y = (x - 1)^2 + 5$.

6.52°. 1) $y = -(x + 3)^2 - 1$; 2) $y = 5 - (x - 2)^2$;
3) $y = 6 - (x - 4)^2$; 4) $y = -(x + 9)^2 - 7$.

6.53. Запишите уравнение параболы, полученной из параболы $y = 7x^2$ сдвигами вдоль оси Ox и вдоль оси Oy соответственно на:

- 1) 3 единицы влево и 2 единицы вниз;
- 2) 5 единиц вправо и 6 единиц вниз;

- 3) 0,5 единицы вправо и 5 единиц вверх;
- 4) 3,5 единицы влево и 2 единицы вверх.

6.54°. Определите по изображению графика функции $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$ (см. рис. 70), при каких значениях x функция принимает:

- 1) положительные значения;
- 2) отрицательные значения;
- 3) значения, равные нулю;
- 4) значения, не большие нуля.

6.55°. Используя изображение графика функции (см. рис. 73), назовите свойства а)–д) (см. пример 1) функции, заданной формулой $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$.

6.56°. Какими преобразованиями (сдвигами) из параболы $y = 6x^2$ можно получить параболу:

- 1)° $y = 6x^2 - 3$; 2)° $y = 6(x-1)^2$; 3) $y = 6(x-1)^2 - 3$?

6.57. Какими преобразованиями из параболы $y = \frac{1}{2}(x+6)^2$ можно получить параболу:

- 1) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 - 5$; 2) $y = \frac{1}{2}(x+6)^2 + 7$;
3) $y = -\frac{1}{2}(x+6)^2 + 10$; 4) $y = -\frac{1}{2}(x+6)^2 - 12$?

6.58. Какими преобразованиями из параболы $y = -3(x-4)^2$ можно получить параболу:

- 1) $y = -3(x-4)^2 + 8$; 2) $y = -3(x-4)^2 - 9$;
3) $y = 3(x-4)^2 - 24$; 4) $y = 3(x-4)^2 + 16$?

6.59°. Укажите уравнение оси симметрии параболы:

- 1) $y = 3(x-4)^2 - 2$; 2) $y = -6(x+2)^2 + 6$;
3) $y = -2(x+7)^2 + 1$; 4) $y = 4(x-3)^2 + 5$.

6.60°. Найдите координаты вершины параболы:

- 1) $y = 5(x-8)^2 + 2$; 2) $y = -2(x+3)^2 - 5$;
3) $y = -4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$; 4) $y = 8\left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{8}$;
5) $y = (x+a)^2 - b$; 6) $y = (x-c)^2 - p$.

6.61. Изобразите параболу:

1) $y = (1 - x)^2 - 2$;

2) $y = (4 - x)^2 + 4$;

3) $y = -(x + 3)^2 + \frac{3}{2}$;

4) $y = -(x - 2,5)^2 - \frac{5}{2}$;

5) $y = -(x + 4,5)^2 - 3,5$;

6) $y = -(x + 1,5)^2 + 5,5$.

6.62. Для каждой функции из упражнения **6.61** по изображению графика укажите ее свойства а)—д) (см. пример 1).

6.63. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 74, и укажите ее свойства.

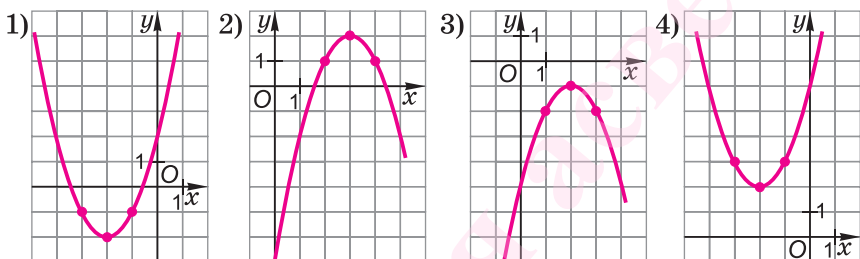


Рис. 74

6.64°. Принадлежит ли графику функции $y = (x - 1)^2 + 4$ точка:

1) $A(-3; 20)$;

2) $B(0; 3)$;

3) $C(1; 16)$;

4) $D(2; 5)$?

6.65. Имеет ли график функции $y = 0,8(x - 6)^2 + 5$ общие точки с прямой:

1) $y = -10$;

2) $y = 100$;

3) $y = 0$;

4) $y = 4$?

6.66. Имеет ли график функции $y = -6,2(x + 8)^2 - 3$ общие точки с прямой:

1) $y = 200$;

2) $y = -300$;

3) $y = -3$;

4) $y = 8$?

6.67. При каких значениях p указанная точка принадлежит графику функции $y = 3(x + p)^2 - 2$:

1) $(1; 10)$;

2) $(-2; -2)$;

3) $(-3; 5)$;

4) $(2; 10)$?

6.68. При каких значениях p данная функция принимает только отрицательные значения:

1) $y = p(x - 7)^2 - 3$;

2) $y = 2(x + p)^2 - 1$;

3) $y = -0,3(x + 8)^2 + p$;

4) $y = -\frac{1}{2}(x - 9)^2 + p$?

6.69. Верно ли, что при любом значении p парабола из упражнения 6.68 имеет общие точки с прямой:

- а) $y = -10$; б) $y = 0$; в) $y = 27$?

6.70. Назовите, при каких условиях вершина параболы $y = a(x - s)^2 + t$ будет расположена:

- 1) в III или IV координатном угле (четверти);
- 2) во II координатном угле (четверти);
- 3) не в IV координатном угле (четверти);
- 4) во II или III координатном угле (четверти).

6.6. Квадратичная функция

Напомним, что функция

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — числа, $a \neq 0$, называется квадратичной (квадратной).

Рассмотрим, например, функцию

$$y = x^2 - 4x + 3 \tag{1}$$

Преобразуем формулу (1) к виду, изученному в п. 6.5. Для этого в правой части квадратного трехчлена $y = x^2 - 4x + 3$ выделим полный квадрат:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 = (x - 2)^2 - 1.$$

Таким образом, формулу (1) можно записать в виде

$$y = (x - 2)^2 - 1.$$

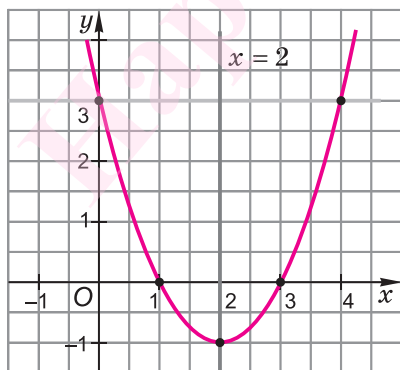


Рис. 75

Следовательно, графиком квадратичной функции (1) является парабола с вершиной в точке $(2; -1)$; ее ось симметрии — прямая $x = 2$ — проходит через эту точку параллельно оси Oy , а ветви направлены вверх (рис. 75).

Так как вершина параболы лежит ниже оси Ox , а ветви ее направлены вверх, то рисунок

дает наглядное представление о том, что парабола пересекает ось Ox в двух точках и ось Oy в одной точке (назовите координаты этих точек).

Конечно, это можно установить и не прибегая к рисунку. Достаточно заметить, что точки пересечения параболы с осью Ox — это те точки параболы, ординаты которых равны нулю. Тогда получим, что в формуле (1) $y = 0$ и абсциссы точек пересечения удовлетворяют уравнению

$$0 = x^2 - 4x + 3.$$

Решив это уравнение, получим $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Чтобы найти точку пересечения параболы с осью Oy , достаточно заметить, что абсцисса этой точки равна нулю, т. е. при $x = 0$ в формуле (1) $y = 3$. Значит, точка пересечения параболы с осью Oy — это точка $(0; 3)$.

На параболе есть еще одна точка с ординатой 3, симметричная точке $(0; 3)$. Абсциссу ее можно найти, подставив $y = 3$ в формулу (1). Из уравнения $3 = x^2 - 4x + 3$ находим $x = 4$.

Такие данные обычно используют, чтобы получить *схематичное изображение* параболы.

Так, для *схематичного изображения параболы* (например, $y = x^2 - 4x + 3$) нужно:

- 1) *отметить вершину параболы* (точку $(2; -1)$);
- 2) *провести через эту точку ось симметрии параболы* (прямую $x = 2$);
- 3) *отметить точки пересечения параболы с осью Ox , если они есть* (точки $(1; 0)$ и $(3; 0)$);
- 4) *отметить точку пересечения параболы с осью Oy* (точку $(0; 3)$);
- 5) *отметить точку, симметричную точке пересечения параболы с осью Oy относительно оси симметрии параболы* (точку $(4; 3)$);
- 6) *изобразить параболу, проходящую через отмеченные точки* (см. рис. 75).

Пример 1. Изобразить схематично график функции

$$y = -2x^2 + 10x - 13. \quad (2)$$

Решение. 1) Преобразуем формулу (2) к виду, изученному в п. 6.5. Для этого вынесем за скобки старший коэффициент -2 :

$$y = -2\left(x^2 - 5x + \frac{13}{2}\right).$$

Теперь в квадратном трехчлене, стоящем в скобках, выделим полный квадрат:

$$x^2 - 5x + \frac{13}{2} = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + \frac{13}{2} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Итак, получим

$$y = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Вершина параболы — точка $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

2) Ось симметрии параболы — прямая $x = \frac{5}{2}$.

3) Точки пересечения параболы с осью Ox — это точки, ординаты которых равны нулю. Если в формуле (2) положить $y = 0$, то получится квадратное уравнение

$$0 = -2x^2 + 10x - 13.$$

Его дискриминант $D = 10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 13 = -4$. Следовательно, это уравнение не имеет корней, а, значит, парабола не имеет точек пересечения с осью Ox . (Это можно было определить и без вычислений, так как вершина параболы лежит ниже оси Ox и ее ветви направлены вниз.)

4) Чтобы найти точку пересечения параболы (2) с осью Oy , заметим, что абсцисса этой точки равна 0. Полагая $x = 0$ в формуле (2), получим $y = -13$, значит, точка пересечения параболы с осью Oy — это точка $(0; -13)$.

5) Точка, симметричная ей относительно оси симметрии параболы, имеет ординату -13 . Полагая $y = -13$ в формуле (2), получим, что ее абсцисса удовлетворяет уравнению

$$-13 = -2x^2 + 10x - 13.$$

Решив это уравнение, найдем $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Значит, на параболе лежит и точка $(5; -13)$.

6) Изобразим схематично параболу (2) (рис. 76).

Пример 2. Изобразить график функции

$$y = 3x^2 + 3x - 6.$$

Решение. 1) Выделим полный квадрат в правой части формулы:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x - 6 &= 3(x^2 + x - 2) = \\ &= 3\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2\right) = \\ &= 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, $y = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{3}{4}$.

Вершина параболы — точка $\left(-\frac{1}{2}; -6\frac{3}{4}\right)$.

2) Ось симметрии параболы — прямая $x = -\frac{1}{2}$.

3) Найдем точки пересечения параболы с осью Ox . Абсциссы этих точек — корни уравнения $3x^2 + 3x - 6 = 0$. Откуда для равносильного ему уравнения $x^2 + x - 2 = 0$ имеем: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Получили точки $(-2; 0)$ и $(1; 0)$.

4) Найдем точку пересечения параболы с осью Oy . При $x = 0$ получим $y = -6$, т. е. точку $(0; -6)$.

5) Найдем точку, симметричную точке $(0; -6)$ относительно оси симметрии параболы, решив уравнение $-6 = 3x^2 + 3x - 6$, т. е. $3x^2 + 3x = 0$. Откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Таким образом, искомая точка — точка $(-1; -6)$.

6) Изобразим схематично параболу $y = 3x^2 + 3x - 6$ (рис. 77).

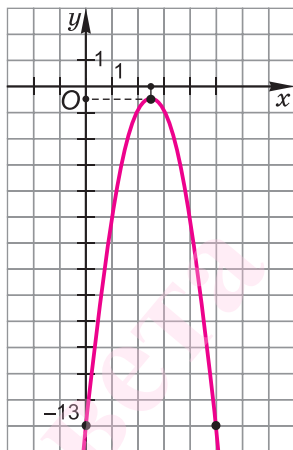


Рис. 76

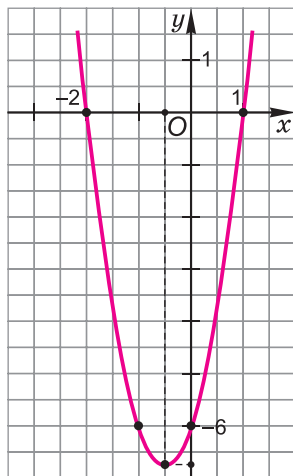


Рис. 77



Заметим, что x_0 — абсциссу вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ и y_0 — ординату этой вершины — можно найти по формулам:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{D}{4a}, \quad (3)$$

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (проверьте эти формулы по примерам 1—2).

▲ Докажем это утверждение.

Формулу, задающую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, преобразуем таким же образом, как в примерах 1—2.

Вынесем за скобки старший коэффициент $a \neq 0$:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Далее в квадратном трехчлене, стоящем в скобках, выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}, \end{aligned}$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

В итоге получим

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Таким образом, вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ является точка $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$. ▣▲

Зная абсциссу x_0 вершины параболы, ее ординату y_0 можно получить, подставив в уравнение параболы значение $x = x_0$, т. е. $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Когда уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ представлено в виде $y = a(x - s)^2 + t$, то, как мы знаем, s и t являются координатами ее вершины. Их (s и t) можно сразу находить по формулам (3), не преобразуя уравнение, поскольку $s = x_0$, $t = y_0$.

Пример 3. Какими преобразованиями (сдвигами) из параболы $y = 3x^2$ можно получить параболу $y = 3x^2 - 24x + 9$?

Решение. Воспользуемся формулами (3). По условию

$$a = 3, b = -24, c = 9, \text{ тогда } D = (-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 6^2 \cdot 13.$$

Отсюда по формулам (3) имеем:

$$s = x_0 = -\frac{-24}{2 \cdot 3} = 4; \quad t = y_0 = -\frac{6^2 \cdot 13}{4 \cdot 3} = -39.$$

Ответ: параболу $y = 3x^2 - 24x + 9$ можно получить из параболы $y = 3x^2$ сдвигом на 4 единицы вправо вдоль оси Ox и на 39 единиц вниз вдоль оси Oy .

Таким образом, мы получили еще один способ изображения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

А

Многие явления окружающей реальности, как оказывается, связаны с квадратичной функцией и ее графиком. Например, путь, пройденный телом при равноускоренном движении, вычисляется по формуле

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0.$$

Известно, что траектория камня, брошенного под углом к горизонту, летящего футбольного мяча или артиллерийского снаряда будет параболой (при отсутствии сопротивления воздуха).

Свойства параболы используются при изготовлении прожекторов и автомобильных фар.

?

1. Какая функция называется квадратичной?
2. Как для параболы $y = ax^2 + bx + c$ найти:
 - а) координаты вершины;
 - б) координаты точки пересечения с осью Oy ;
 - в) координаты точек пересечения с осью Ox ;
 - г) координаты точек пересечения с прямой $y = c$?
3. Какие из точек, перечисленных в вопросе 2, имеются у любой параболы $y = ax^2 + bx + c$?
4. Как схематично изобразить график функции $y = ax^2 + bx + c$?
5. Какими преобразованиями (сдвигами) из параболы $y = ax^2$ можно получить параболу $y = ax^2 + bx + c$, если ее вершина в точке:
 - а) $(-4; 5)$;
 - б) $(k; m)$?

Упражнения

Используя метод выделения полного квадрата, приведите формулу к виду $y = a(x - s)^2 + t$ и изобразите данную параболу (6.71—6.72).

6.71°. 1) $y = x^2 + 20x + 6$; 2) $y = x^2 - 6x + 10$;
3) $y = -x^2 - 8x + 3$; 4) $y = -x^2 - 11x - 20$;
5) $y = 4x^2 - 12x + 8$; 6) $y = 5x^2 + 15x + 2$.

6.72. 1) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$;
3) $y = (-2x - 7)x$; 4) $y = (-3x + 2)x$.

6.73°. Найдите координаты вершины параболы по формулам (3) и изобразите схематично эту параболу:

1) $y = 42 + x - x^2$; 2) $y = 6 - x - x^2$;
3) $y = x^2 + 20 - 9x$; 4) $y = x^2 - 24 + 5x$.

6.74. Укажите координаты вершины параболы и координаты точек ее пересечения с осями Ox и Oy :

1) $y = 9x^2 + 6x - 3$; 2) $y = 4x^2 + 12x - 7$;
3) $y = \frac{1}{9}x^2 + 2 - x$; 4) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$.

6.75°. Найдите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\frac{1}{2}$; 2) $y = -2x^2 + 4x + 16$;
3) $y = -2x^2 - 3x + 14$; 4) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}$.

6.76. Изобразите схематично график функции и укажите ее свойства:

1) $y = -2x^2 - 4x + 6$; 2) $y = 4x^2 + 4x - 8$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2 - x + 1$.

6.77. Докажите, что парабола не пересекается с осью Ox :

- 1) $y = 5x^2 + 7x + 21$; 2) $y = 3x^2 - 15x + 37$;
3) $y = -7x^2 - x - 7$; 4) $y = -6x^2 + 5x - 8$.

6.78*. При каких значениях t парабола имеет с осью Ox только одну общую точку:

- 1) $y = x^2 + 2(t - 3)x + 3t + 1$;
2) $y = -x^2 - 2(t + 2)x - 4$;
3) $y = (t - 2)x^2 - (t - 1)x - 0,2$;
4) $y = (t + 2)x^2 + (t + 7)x + 9$?

6.79*. При каких значениях t вершина данной параболы расположена:

- а) ниже оси Ox ; б) выше оси Ox ; в) на оси Ox :

- 1) $y = 2tx^2 - 4x + 3$; 2) $y = 3x^2 + 2x - 5t$;
3) $y = -4tx^2 + x - 1$; 4) $y = -tx^2 - x + 3$?

6.80. На рисунке 78 изображен график функции $y = x^2 + px + q$. Определите значения p и q .

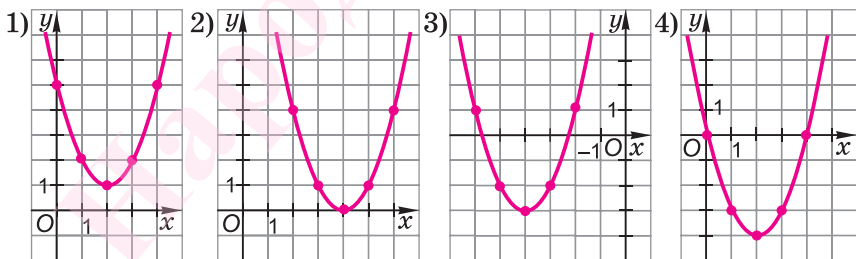


Рис. 78

6.81*. Какому координатному углу (четверти) принадлежит вершина параболы $y = mx^2 + px + k$, если:

- 1) $m > 0, p > 0, k > 0$; 2) $m > 0, p < 0, k > 0$;
3) $m < 0, p < 0, k < 0$; 4) $m < 0, p > 0, k < 0$?

6.82*. Укажите знаки чисел m , n и k , если ветви параболы $y = mx^2 + nx + k$ направлены вниз, а вершина этой параболы принадлежит:

- 1) II координатному углу (четверти);
- 2) I координатному углу (четверти);
- 3) IV координатному углу (четверти);
- 4) III координатному углу (четверти).

6.83*. На рисунке 79 изображена парабола $y = ax^2 + bx + c$. Укажите знаки чисел a , b , c .

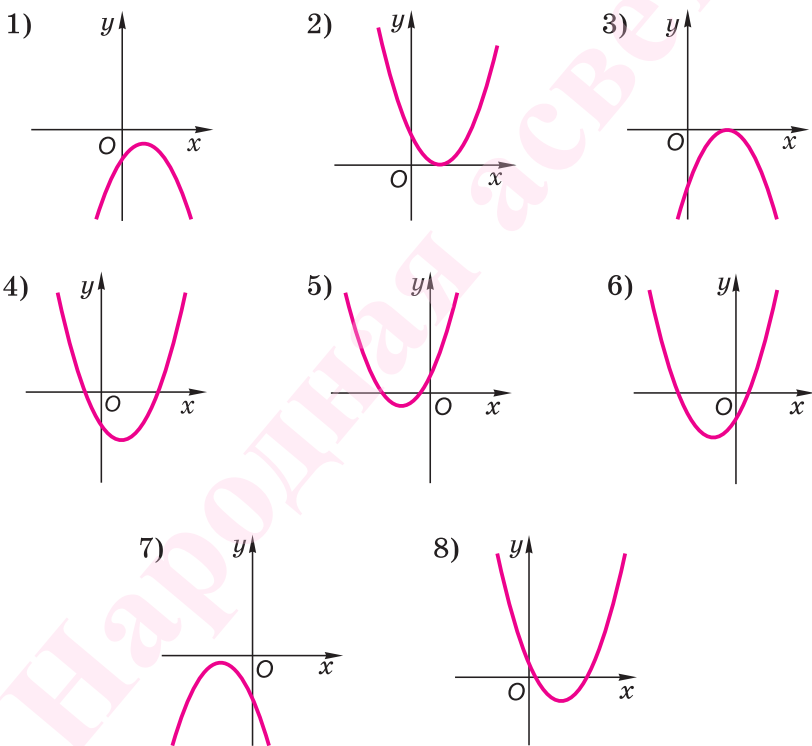


Рис. 79

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Упражнения для повторения вопросов арифметического и алгебраического материала курса математики 5—7-х классов

Вычислите (1—2).

1. 1) $34,17 : 1,7 + \left(2\frac{3}{4} + 0,15\right) : \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8};$

2) $5,85 - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7};$

3) $\left(1\frac{1}{4} - 1,842\right) \cdot 1\frac{13}{37} + \left(3\frac{1}{2} - 1,52\right) : 1,1;$

4) $\left(1\frac{1}{5} - 1,911\right) \cdot 1\frac{21}{79} + \left(0,91 + 1\frac{3}{4}\right) : 1,4.$

2. 1) $13^{-2};$

2) $20^{-1};$

3) $\left(1\frac{1}{5}\right)^{-3};$

4) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2};$

5) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1};$

6) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-4};$

7) $(0,01)^{-1};$

8) $(0,2)^{-4};$

9) $(1,6)^{-3};$

10) $(-5)^{-4};$

11) $\left(-\frac{8}{9}\right)^{-2};$

12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^{-3}.$

Найдите значение выражения (3—4).

3. 1) $5^{-3} + 15^{-2};$

2) $10^{-1} + 2^{-4} - 5^{-2};$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + (-2,8)^0 - 4^{-3};$

4) $\left(\frac{2}{25}\right)^{-2} \cdot 5^{-5};$

5) $3^{-1} - 6 \cdot 3^{-2} + 9 \cdot 3^{-3};$

6) $2^{-2} + 8 : 2^{-1} - (-2)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}.$

4. 1) $3^{-1} + \frac{5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} - 16^{-1} \cdot 133}{9 - 0,5^{-1}} \cdot \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-1};$

2) $4^{-1} + \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} - 9^{-1} \cdot 160}{0,125^{-1} - 4} \cdot \left(\frac{2}{9} - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}.$

Упростите выражение (5—8).

5. 1) $\frac{m^4 x}{n^3 y} : \frac{n^5 y}{m^2 x};$

2) $\frac{27 y^3}{16 m^2} : \frac{0,9}{8 m^2 n};$

- 3) $\frac{9xy}{4a} : \frac{45xy^5}{16a^2}$; 4) $\frac{pz^8}{py^6} : \frac{qz^6}{p^2y^7}$;
 5) $\frac{6m^5t^4}{13np^2} : \frac{36m^4t^3}{169n^2p^5}$; 6) $\frac{3p^2mq^3}{2a^2b^2} : \frac{9p^2q^2}{28a^3b^4}$.
6. 1) $-54p^{10}n^{17} : \frac{27p^8n^{14}}{22a^6}$; 2) $28a^{18}b^{19} : \left(-\frac{14a^{14}b^{15}}{15c^4}\right)$;
 3) $\frac{72a^{12}b^{10}}{25y^4} : (-24a^{11}b^8)$; 4) $-\frac{48x^9y^{10}}{49z^9} : (16x^7y^8)$;
 5) $\frac{x^2y^3}{8q} : \left(-2\frac{1}{2}xy\right)^3$; 6) $\frac{21a^3b^{30}}{10mn} : (-7b^3)^5$;
 7) $(-36m^2)^4 : \left(-\frac{12m^2n}{5p}\right)$; 8) $\left(5\frac{1}{3}a^4x\right)^2 : \frac{16a^3x}{3m}$;
 9) $16x^2y^3 : \left(-20 \cdot \frac{x^5y^4}{3a^2b}\right)$; 10) $46x^{14}y^{25} : \left(-23 \cdot \frac{x^{10}y^{20}}{9z^2}\right)$.
7. 1) $\left(\frac{17x^4y^{13}}{6a^2b^3} : \frac{68x^2y^5}{9a^5b^4}\right) : \frac{3y^6b}{4x^3a^5}$;
 2) $\left(\frac{11a^5b^{12}}{12cd^6} : \frac{55a^3b^2}{18c^7d^4}\right) : \frac{21b^6d^2}{20a^7c^3}$;
 3) $\left(\frac{3m^5n^3}{4b^4}\right)^3 : \left(\frac{3m^3n^2}{16b^6}\right)^4$;
 4) $\left(\frac{5m^3n^4}{9k^2}\right)^3 : \left(\frac{5m^2n^2}{3k^3}\right)^4$.
8. 1) $(2m - 3mn)^2 - (3m - 2mn)^2$; 2) $(a + 4)^2 + 4(a + 1)^2$;
 3) $4(5 - b)^2 + 3(b - 2)^2$; 4) $6(1 - b)^2 - 4(b + 1)^2$;
 5) $(3m + 4)^2 - (2m - 3)(2m + 3)$;
 6) $(2a + 3b)(5a - b) - (a + b)(10a - 3b)$.

Разложите на множители (9—11).

9. 1) $a^4 - a^2 + a^2 - 1$; 2) $b^4 + b^2 + b^2 + 1$;
 3) $a^5 + a^3 - a^2 - 1$; 4) $b^4 - b^3 - b + 1$.
10. 1) $m^2 - 36$; 2) $4m^2n^2 - 100$;
 3) $n^4 - n^6$; 4) $(2m + n)^2 - 9(m + n)^2$.
11. 1) $m^2 - 6m + 9$; 2) $9m^2 + 4 + 12m$;
 3) $m^4 - 14m^2 + 24$; 4) $16m^2 + 8mn - 3n^2$.

Выполните действия (12—15).

12. 1) $\left(\frac{c}{c-4} - \frac{c}{c+4} - \frac{c^2+16}{16-c^2}\right) : \frac{4c+c^2}{(4-c)^2}$;
 2) $\left(\frac{c}{c+6} + \frac{36+c^2}{36-c^2} - \frac{c}{c-6}\right) : \frac{6c+c^2}{(6-c)^2}$;
 3) $\left(\frac{2m}{n+2m} - \frac{4m^2}{n^2+4m^2+4mn}\right) : \left(\frac{2m}{n^2-4m^2} + \frac{1}{2m-n}\right)$;
 4) $\left(\frac{2p}{2p+q} - \frac{4p^2}{4p^2+q^2+4pq}\right) : \left(\frac{2p}{4p^2-q^2} + \frac{1}{q-2p}\right)$;
 5) $\left(\frac{1}{x-2y} - \frac{4x}{4x^2-x^2} - \frac{5}{x+2y}\right) : \left(\frac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2} - 1\right)$;
 6) $\left(\frac{1}{2a-b} - \frac{4a}{b^2-4a^2} - \frac{3}{2a+b}\right) : \left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} + 1\right)$.
13. 1) $\left(\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab}\right)\right) : \frac{b}{a-b}$;
 2) $\left(\frac{2a-1}{a-3} - \frac{a^2-4}{a^2+6a+9} \cdot \frac{a+3}{a-2} + \frac{3}{9-a^2}\right) : \frac{a^2}{a-3}$;
 3) $\frac{10a-25}{2a+5} + \left(\frac{6a}{2a+5} - \frac{16a}{4a^2+25+20a}\right) : \frac{6a+7}{4a^2-25}$;
 4) $\frac{n+2}{4-n} + \frac{n(n+4)}{n^2+12} \cdot \left(\frac{n+3}{n-4} + \frac{7n}{16-n^2}\right) : \frac{n^2}{2n+16}$.
- 14*. 1) $\frac{b^2-4}{(b+3)^2} \cdot \frac{b^3+9b^2+27b+27}{(b^3+8)(b-2)}$;
 2) $\frac{x^3+27}{(x-2)^3} : \frac{x^2-3x+9}{(x-2)^2}$;
 3) $\frac{m^3-125n^3}{m^2+10mn+25n^2} \cdot \frac{(m^2-25n^2)^2}{m^2+5mn+25n^2}$;
 4) $\frac{(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)}{(x+2y)^3(x^2-2xy+4y^2)} \cdot \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2+2xy+4y^2}$.
- 15*. 1) $\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}} + \frac{1}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}\right) \cdot \frac{a^{-3}-b^{-3}}{2ab}$;
 2) $\left(\frac{a^{-1}b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}} + \frac{1}{a^{-1}-b^{-1}}\right) \cdot \frac{a^{-2}+b^{-2}+a^{-1}b^{-1}}{(a^{-1}+b^{-1})^2}$.

Найдите значение выражения (16—19).

16. 1) $\left(\frac{1}{a^2+b^2+2ab} - \frac{1}{a^2+b^2-2ab}\right) \cdot \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{ab}$
 при $a = 12,03$, $b = -16,97$;

$$2) \left(\frac{1}{a^2 + 25b^2 + 10ab} - \frac{1}{a^2 + 25b^2 - 10ab} \right) \cdot \frac{a^4 - 50a^2b^2 + 625b^4}{ab}$$

при $a = -24,71$, $b = -25,29$;

$$3)^* \left(\frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 - 8} - \frac{p^2 + p + 2}{p^2 - 4} \right) : \frac{p + 2}{8p - 16} \text{ при } p = -3\frac{11}{13};$$

$$4)^* \left(\frac{n^3 + 125}{(n^2 - 5n + 25)(n - 5)} - \frac{n}{n + 5} \right) : \frac{3n + 5}{n^2 - 25} \text{ при } n = 2\frac{7}{17}.$$

$$17. 1) (a + b)^{-1} \cdot \frac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}} : \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{2ab}{a + b} \right)^{-2} \text{ при } a = -\frac{1}{4}, b = 0,4;$$

$$2) \frac{m^{-2}n^{-1} - m^{-1}n^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \frac{1}{m} \cdot (mn^{-1} + 2 + m^{-1}n)^{-1}$$

при $m = 0,003$, $n = 0,007$.

$$18. 1) \frac{a^{-3} - 4}{a^{-3}} - \frac{a^{-6} - 16}{a^{-3}} \cdot \frac{1}{a^{-3} - 4} \text{ при } a = -3,5;$$

$$2) \frac{a^{-10} - 25}{a^{-5}} \cdot \frac{1}{a^{-5} + 5} - \frac{a^{-5} + 5}{a^{-5}} \text{ при } a = -0,4.$$

$$19. 1) \left(\frac{4a^{-4}}{a^{-4} + 1} - \frac{a^{-4}}{a^{-8} + 1 + 2a^{-4}} \right) : \frac{4a^{-4} + 3}{a^{-4} + 1} + \frac{2a^{-4}}{a^{-4} + 1} \text{ при } a = -\frac{1}{2};$$

$$2) \left(\frac{3a^{-6}}{a^{-12} + 25 - 10a^{-6}} - \frac{a^{-6}}{a^{-6} - 5} \right) : \frac{8 - a^{-6}}{25 - a^{-12}} - \frac{5a^{-6}}{5 - a^{-6}} \text{ при } a = -1.$$

Докажите тождество (20—21).

$$20. 1) (1 + m)(1 - m)(m^2 - 1) = 1 - m^4;$$

$$2) 5n^2 - 3(n - 1)(1 + n) = 2n^2 + 3;$$

$$3) 7(p^2 - 2) - 22 = 3p^2 + 4(p + 3)(p - 3);$$

$$4) 8(6 - q)(q + 6) + 5q^2 = 3(82 - q^2) + 42.$$

$$21^*. 1) \frac{(a^n b^n)^{-2}}{a^{-n} b^{-2n} - a^{-2n} b^{-n}} + \left(\frac{a^{-n} + b^{-n}}{a^{-n} - b^{-n}} \cdot \left(\frac{1}{b^{-n}} - \frac{1}{a^{-n}} \right) \right)^{-1} = \frac{2a^n}{a^{2n} - b^{2n}};$$

$$2) \left(\frac{a^{-n} \cdot b^{-n}}{a^{-3n} - b^{-3n}} + \frac{1}{a^{-n} - b^{-n}} \right) \cdot \frac{(a^{-n} + b^{-n})^{-2}}{(a^{-2n} + b^{-2n} + a^{-n} \cdot b^{-n})^{-1}} = \frac{(b^n - a^n)^{-1}}{a^{-n} \cdot b^{-n}}.$$

Решите уравнение (22—25).

$$22. 1) 8x - 6 = 5x + 3;$$

$$2) 7x + 19 = 2x - 31;$$

$$3) \frac{5x}{2} - \frac{16x}{7} - \frac{1}{7} = 2;$$

$$4) \frac{3x}{2} - \frac{2x}{9} + \frac{x}{6} = 13;$$

5) $\frac{x+(x-5)}{2} = 11$; 6) $\frac{2x-(3-x)}{2} = 3\frac{3}{8}$.

23. 1) $\frac{5t-1}{7} = \frac{1+8t}{3}$; 2) $\frac{11+3t}{5} = \frac{5t-7}{15}$;

3) $\frac{7z+3}{7} = \frac{8+8z}{8}$; 4) $\frac{8z+5}{37} = \frac{7z-2}{111}$;

5) $\frac{3+x}{6} + \frac{x-7}{3} = \frac{x+11}{2}$; 6) $\frac{1+3x}{5} - \frac{7x+3}{15} = \frac{2x-1}{3}$.

24. 1) $3(x+1)(x+2) - (3x-4)(x+2) = 36$;
2) $2(3x-1)(2x+5) - 6(2x-1)(x+2) = 48$.

25. 1) $x(x+2) - (x-3)(3+x) = 13$;
2) $(3x-1)^2 = (7-5x)^2 - (4x+5)^2$;
3) $(3y-1)(2y+7) = (y+1)^2 + (5y-1)(3+y)$;
4) $(y-2)^3 - 2(y-3)(y^2+9+3y) - (y+2)^3 = 0$.

26. Решите уравнение и сделайте проверку:

1) $1 - \frac{2x-1}{1-4x} = 0$; 2) $\frac{2y^2-17}{y^2-1} - 1 = 0$;

3) $\frac{(x+2)^3 - x(x+3)^2}{3x+8} - 2x = 0$;

4) $\frac{x(x-3)^2 - (x-2)^3}{16-6x} + 2 = 0$.

27. Найдите $p^2 + \frac{1}{p^2}$, если:

1) $p - \frac{1}{p} = 4$; 2) $p + \frac{1}{p} = 3$.

28. 1) Найдите значение выражения $\frac{m^2 + mn - n^2}{m^2 - mn + n^2}$,
если $\frac{m}{n} = 4$.

2) Найдите значение выражения $\frac{4m^2 - 3mn + n^2}{m^2 - mn + n^2}$,
если $\frac{n}{m} = 2$.

2. Текстовые задачи

В 7-м классе мы решали задачи с помощью составления уравнения. Напомним на примерах этот метод решения.

Пример 1. Для строительства дома привезли стальные балки двух видов: массой по 125 кг и по 250 кг, причем балок второго вида было на 8 больше, чем первого. Сколько привез-

ли балок первого и второго видов, если их общая масса составила 4,25 т?

Решение. Пусть x — число балок массой по 125 кг, тогда $x + 8$ — число балок массой по 250 кг. Общая масса балок составляет $(125x + 250(x + 8))$ кг и по условию равна 4,25 т, т. е. 4250 кг, поэтому можно записать уравнение

$$125x + 250(x + 8) = 4250.$$

Решив это уравнение, получим $x = 6$.

Значит, число балок массой по 250 кг равно $6 + 8$, т. е. 14.

Ответ: 6 балок массой по 125 кг и 14 балок массой по 250 кг.

Пример 2. Повар Татьяна разлила молоко из бидона поровну в 25 кружек, и в бидоне осталось еще пол-литра молока. Татьяна подсчитала, что если наливать из того же бидона в каждую кружку на 0,03 л молока больше, то его не хватит ровно на одну кружку. Сколько литров молока вмещает бидон?

Решение. *Способ 1.* Пусть бидон вмещает x л молока, тогда Татьяна наливала в каждую кружку по $\frac{x - 0,5}{25}$ л молока. Если бы Татьяна наливала молоко с добавкой, то его хватило бы только на 24 кружки, т. е. в каждую кружку было бы налито по $\frac{x}{24}$ л молока. По условию добавка равна 0,03 л, следовательно, составим уравнение

$$\frac{x - 0,5}{25} = \frac{x}{24} - 0,03.$$

Решив это уравнение, получим $x = 6$.

Ответ: 6 л.



Способ 2. Пусть x л молока Татьяна налила в каждую из 25 кружек, тогда в бидоне всего $(25x + 0,5)$ л молока. Если бы Татьяна наливала молока по $(x + 0,03)$ л, то его хватило бы на 24 кружки, значит, вместимость бидона равна $((x + 0,03)24)$ л. Составим уравнение

$$25x + 0,5 = (x + 0,03)24.$$

Решив это уравнение, получим $x = 0,22$.

Итак, в каждую кружку налили по 0,22 л, значит, в бидоне было $(0,22 \cdot 25 + 0,5)$ л молока, т. е. 6 л.

Пример 3. Из деревни Замошье в деревню Слободка вышла группа туристов со скоростью $6 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Через 3 ч вслед за ними на велосипеде выехал инструктор Вася со скоростью $18 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Вася приехал в Слободку через 20 мин после прихода туда туристов. Найти расстояние от Замошья до Слободки.

Решение. *Способ 1.* Пусть x км — расстояние от Замошья до Слободки, тогда $\frac{x}{6}$ ч затратили на весь путь туристы, $\frac{x}{18}$ ч затратил на дорогу до Слободки Вася. Поскольку Вася выехал из Замошья на 3 ч позже и приехал в Слободку на 20 мин (т. е. на $\frac{1}{3}$ ч) позже, то туристы были в пути на $2\frac{2}{3}$ ч дольше, чем Вася. Составим уравнение

$$\frac{x}{6} - 2\frac{2}{3} = \frac{x}{18}.$$

Решив его, получим $x = 24$.

Ответ: 24 км.



Способ 2. Пусть x ч — время, за которое туристы прошли весь путь, тогда Вася затратил на этот же путь $(x - 3 + \frac{1}{3})$ ч. Вася проехал $18(x - 2\frac{2}{3})$ км, а туристы прошли $6x$ км. Поскольку Вася и туристы прошли одно и то же расстояние, то составим уравнение

$$18(x - 2\frac{2}{3}) = 6x.$$

Решив это уравнение, получим $x = 4$.

Мы нашли, что туристы были в пути 4 ч, значит, расстояние от Замошья до Слободки равно $(6 \cdot 4)$ км, т. е. 24 км.

Пример 4. Если двузначное число, в котором цифра десятков на 3 больше цифры единиц, уменьшить на 20 %, то сумма этого и полученного чисел будет на 10 больше суммы исходного числа и числа, полученного из исходного перестановкой цифр. Найти исходное число.

Решение. Пусть x — цифра единиц, тогда $x + 3$ — цифра десятков, а $10(x + 3) + x$ — искомое число. После уменьшения исходного числа на 20 % получим новое число, равное $0,8(10(x + 3) + x)$. Поскольку по условию сумма исходного

и этого нового числа на 10 больше, чем сумма исходного числа и числа, полученного из исходного перестановкой цифр, то составим уравнение:

$$10(x + 3) + x + 0,8(10(x + 3) + x) - 10 = 10(x + 3) + x + 10x + x + 3.$$

Решив это уравнение, получим $x = 5$ (убедитесь в этом).

Таким образом, 5 — цифра единиц, значит, 8 — цифра десятков, следовательно, исходное число 85.

Ответ: 85.

Пример 5. Для наполнения плавательного бассейна используются два крана. За 1 ч первый кран заполняет водой на $\frac{1}{40}$ объема бассейна больше, чем второй кран. При одновременной работе двух кранов весь бассейн наполняется за 8 ч. За какое время может наполнить бассейн водой каждый из кранов?

Решение. Примем объем бассейна за 1.

Пусть x ч — время, за которое наполнит бассейн один первый кран, тогда за 1 ч он заполнит $\frac{1}{x}$ часть бассейна. Поскольку оба крана за 1 ч заполняют $\frac{1}{8}$ часть бассейна, то второй кран за 1 ч заполнит $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{x}\right)$ часть бассейна. Но по условию второй кран за 1 ч заполнит $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{40}\right)$ часть бассейна. Таким образом, составим уравнение

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{40}.$$

Из этого уравнения получим $\frac{1}{x} = \frac{3}{40}$, откуда $x = 13\frac{1}{3}$.

Второй кран за 1 ч заполнит $\frac{3}{40} - \frac{1}{40}$, т. е. $\frac{1}{20}$ часть бассейна, значит, весь бассейн будет им наполнен за 20 ч.

Ответ: за $13\frac{1}{3}$ ч, за 20 ч.

Пример 6. На занятие театрально-музыкальной студии пришло 15 девочек и 25 мальчиков. Несколько танцевальных пар вышло на сцену для репетиции финального танца. Сколько пар на сцене, если отношение числа оставшихся в зале мальчиков к числу оставшихся девочек равно $9:4$?

Решение. Пусть на сцену вышло x пар, тогда в зале осталось $(25 - x)$ мальчиков и $(15 - x)$ девочек. По условию задачи составим уравнение

$$\frac{25 - x}{15 - x} = \frac{9}{4}.$$

По свойству пропорции это уравнение равносильно уравнению

$$4(25 - x) = 9(15 - x).$$

Решив это уравнение, получим $x = 7$.

Ответ: 7 пар.



Напомним, что правильность решения задачи (правильность составления уравнения и вычислений) можно проверить различными способами: составлением обратной задачи, решением задачи другим способом и т. д. Такую проверку обычно не пишут при оформлении решения задачи, ее выполняют для себя, на черновике.

Упражнения

29. Группе из 5 мальчиков и 8 девочек поручили организовать дискотеку. Каждый мальчик принес на 4 компакт-диска больше, чем каждая девочка. Сколько дисков принесли дети, если мальчики принесли на 2 компакт-диска больше, чем девочки?
30. Ручка и металлическая часть молотка весят 500 г. Известно, что 70 ручек тяжелее, чем 15 металлических частей молотков, на 1 кг. Какова масса одной ручки?
31. Для оборудования кинозала завезли кресла. Когда в каждом из 22 рядов расставили по одинаковому числу кресел, 44 кресла оказались не использованы. Когда же число кресел в каждом ряду увеличили на 20 %, то не хватило 22 кресел. Сколько кресел было завезено?
32. Наборщицу попросили напечатать на компьютере рукопись за 12 дней. Если она ежедневно будет печатать на 6 страниц меньше, чем должна была печатать, чтобы уложиться в отведенный срок, то отклонится от срока на 3 дня, а если будет печатать на 6 страниц больше, чем должна была печатать ежедневно, то отклонится от срока на 2 дня. Сколько страниц в рукописи?

33. Из поселка Трусово в поселок Зайцево одновременно выехали два велосипедиста. Ваня ехал со скоростью $15 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а Тамара — со скоростью $7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Доехав до Зайцево, Ваня тотчас развернулся и встретил Тamarу в 20 км от Зайцево. Каково расстояние между поселками?
34. Из деревни Гусево и города Озерска одновременно навстречу друг другу выехали два автобуса со скоростями, отличающимися на $20 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. При встрече оказалось, что один автобус проехал 150 км, а другой — 200 км. С какой скоростью ехал каждый из автобусов?
- 35*. В двузначном числе цифра единиц на 3 меньше цифры десятков. Сумма этого числа и числа, полученного из него перестановкой цифр, является квадратом некоторого числа. Найдите это число.
36. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Найдите это число, если известно, что увеличенное на 6, оно в 9 раз превзойдет цифру единиц исходного числа.
37. Один из тракторов за 1 ч вспахивает на $\frac{1}{24}$ участка больше, чем другой. За какое время второй трактор может вспахать весь участок, если за 7 ч работы второго трактора и за 8 ч работы первого трактора будет вспахано $\frac{5}{6}$ участка?
38. Бассейн становится пустым на 5 ч быстрее, чем наполняется. За какое время наполнится пустой бассейн, если вода, набранная за 4 ч, вытекает за 3 ч?
39. Целлюлоза содержит 70 % воды. После выпаривания 91 кг воды отношение массы сухого вещества к массе воды в полученной целлюлозе составило 4 : 5. Какова исходная масса целлюлозы?
40. Дана дробь $\frac{93}{112}$. Какое число надо вычесть из числителя и прибавить к знаменателю, чтобы полученная дробь стала равна дроби $\frac{2}{3}$?

41. В один из дней месяца (не февраля!) Ваня заметил, что до конца месяца осталось на 2 дня больше, чем прошло с начала месяца. Назовите число, когда Ваня это заметил.

3. Упражнения для повторения вопросов алгебры 8-го класса

42. Расположите в порядке возрастания:

- 1) $48 : 6$, $-48 : (-8)$ и $48 : (-2)$;
2) $-56 : (-7)$, $0,4 : 8$ и $-0,2 : 5$.

43. Сравните значения выражений:

- 1) $6(-5)(-0,2)$ и $-0,4(-5)(-3)$;
2) $-7(-3)(-2)$ и $2(-8)\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 9$.

44. Сравните с нулем:

- 1) $-1,2^{-200}$; 2) $-(-1,4)^{-6}$; 3) $-(-2,5)^{-15}$;
4) $-3,7^{-9}$; 5) $-6,4^{-8}$; 6) $-24,1^{10}$.

45. Сравните с единицей:

- 1) 16^{-4} ; 2) 140^0 ; 3) $0,5^{-7}$;
4) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-8}$; 5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-1}$.

46. Пусть $m < 0$. Верно ли, что:

- 1) $21,0157 + m < 21,0157$; 2) $-171,049 - m < -171,049$?

47. Пусть $p > 0$. Верно ли, что:

- 1) $-80,492 + p < -80,492$; 2) $-25\ 173 - p < -25\ 173$?

48. Сравните числа x и y , если:

- 1) $x - y = 24$; 2) $x - y = -9$;
3) $x - y = (-4)^3$; 4) $x - y = (-3)^4$.

49. Известно, что $a > 0$, $b < 0$. Верно ли, что:

- 1) $a^3b^2 > 0$; 2) $-\frac{a}{b^8} > 0$; 3) $a^2b^3 > 0$;
4) $\frac{a^3}{b^3} < 0$; 5) $\frac{a}{|b^7|} > 0$; 6) $\frac{b^{13}}{a+7} < 0$?

50. Может ли разность чисел $x - y$ быть:
- 1) меньше x ; 2) больше y ;
 - 3) равна x ; 4) равна $-y$?
51. Известно, что $k < 0$. Какая из двух точек лежит левее на координатной прямой:
- 1) $A(p)$ или $B(p + k)$; 2) $A(p)$ или $C(p + k^2)$;
 - 3) $A(p)$ или $C(p + k^3)$; 4) $A(p)$ или $E(p - k^4)$?
52. Пусть $a > b$ — верное числовое неравенство. Сравните значения выражений:
- 1) $a + 5,3$ и b ; 2) a и $b - 3$;
 - 3) $a - 2$ и $b - 3$; 4) $a + 2,9$ и $b + 1,01$.
53. Пусть $a > b$ — верное числовое неравенство. Расположите в порядке убывания:
- 1) b ; $a + 32$; $a + 2,9$; $b - 3\frac{1}{2}$; $b - 7,9$; a ;
 - 2) a ; $a + 7,6$; $a + 52,6$; $b - 89,03$; b ; $b - 0,01$.
54. Может ли разность чисел m и n быть:
- 1) больше $m + n$; 2) меньше $m + n$; 3) равна $m + n$?
55. Пусть $m < n$ — верное числовое неравенство. Сравните:
- 1) $3m - 2(m + 1)$ и $n + 8$;
 - 2) $10(m - 1) - 6(m + 1) - 3m$ и $n - 11$;
 - 3) $-(5m - 2)^2 + 5m(5m - 3) - 4m$ и $-(2n - 3)(8n + 5) + (4n - 3)^2 + 11n$;
 - 4) $(3m + 2)^2 - (3m + 1)(3m - 1) - 11m$ и $(2n - 3)(3n + 2) - 6((n - 2)(n + 2) - n)$.
56. Используя свойства числовых неравенств, преобразуйте верное числовое неравенство $p + 6 < k - 4$ в верное числовое неравенство, левая часть которого имеет вид:
- 1) 6; 2) -4 ; 3) p ; 4) k ;
 - 5) $p + 2$; 6) $p - 2$; 7) $k + 3$; 8) $k - 4$.
57. Преобразуйте числовое неравенство $a - b > 7$ ($b > 0$) в неравенство, левая часть которого имеет вид:
- 1) квадрата разности a и b ;
 - 2) разности квадратов a и b ;

- 3)* разности кубов a и b ;
4)* куба разности a и b .

58. Преобразуйте числовое неравенство $a^2 + ab > 3$ в неравенство, левая часть которого имеет вид:

- 1) квадрата суммы a и b ;
2) квадрата разности a и b ;
3) разности квадратов a и b ;
4) суммы квадратов a и b ;
5) утроенного произведения a и b ;
6) произведения a и суммы $a + b$.

59*. Верно ли числовое неравенство при $a < 0$:

- 1) $\frac{a-6}{a+6} > 1$; 2) $a+5 > \frac{a+5}{2}$;
3) $a < \frac{a^2-9}{a+3}$; 4) $a-7 > \frac{7a-a^2}{7}$?

60. Зная, что $c < 0$, $k < 0$, $p < 0$, умножьте обе части неравенства $3m - 5 > 2n + 8$ на число:

- 1) ck ; 2) c^2k ; 3) ckp ; 4) ckp^2 ;
5) c^3kp ; 6) ck^3p^2 ; 7) $-kp$; 8) $-4c$.

61. Зная, что $k < 0$, $p < 0$, $t < 0$, разделите обе части неравенства $2 - 3x < 17y$ на число:

- 1) pt^2 ; 2) kp ; 3) k^3pt ; 4) k^2p^3t ;
5) kpt^2 ; 6) kp^2t^2 ; 7) $-kpt$; 8) $-kt^3$.

62. Известно, что $(p-k)^5 < (p-k)^3$ и $p > k$. Верно ли, что:

- 1) $(p-k)^4 > (p-k)^3$; 2) $(p-k)^3 > (p-k)^2$;
3) $(p-k)^2 < p-k$; 4) $p-k < -1$?

63. Сравните числа a и b с нулем, если:

- 1) $ab > 0$; 2) $ab < 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$.

64. Известно, что $m > n$ и $n > 0$. Верно ли, что:

- 1) $\frac{m}{n} > 1$; 2) $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$?

65. Известно, что $m > n$ и $m < 0$. Верно ли, что:

1) $\frac{m}{n} < 1$; 2) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} > 0$?

66. Сложите неравенства:

- 1) $8a - 2b > t - 3$ и $5b - 6a > 2t - 1$;
2) $5a^2 + 3b > 2t - 1$ и $-2b - 4a^2 > 2 - t$;
3) $a^2 + 5a - 2b < 3m + 1$ и $25 + m < 2a^2 - 3a + 3b$;
4) $2a^2 - b^2 + 1 < 4m + 2m^2 - 1$ и $a^2 + b^2 - 1 < 3m - 2m^2 - 2$.

67. Пусть $A > B$ и $C > D$ — верные числовые неравенства. Сложите их, если:

1) $A = \frac{a^2}{a^2 - 16}$; $B = \frac{5}{b^2 - 4}$; $C = \frac{-a}{a + 4}$; $D = \frac{-5}{b^2 + 2b}$;
2) $A = \frac{4}{x^2 - 3x}$; $B = \frac{a}{a - b}$; $C = \frac{-4}{x^2 + 3x}$; $D = \frac{ab + b^2}{a^2 - b^2}$.

68. Пусть a — произвольное число. Верно ли, что:

- 1) $16a^2 + 1 \geq 0$; 2) $-(25a - 1)^2 \leq 0$;
3) $8 - a^2 \geq -6$; 4) $(3a - 2)^2 + 25 \geq 0$;
5) $-(6a + 1)^2 \geq 10$; 6) $(5a - 4)^2 \leq -3$;
7) $-a^2 - 7 \leq 0$; 8) $2a \geq a$;
9) $a \geq -a$; 10) $a^2 > a$?

69. Докажите, что:

- 1) если $a \neq 0$ и $a^2b \geq 0$, то $b \geq 0$;
2) если $\frac{a^2}{b^3} \leq 0$, то $b < 0$;
3) если $\frac{a}{b^2} \geq 0$, то $a \geq 0$;
4) если $a \neq 0$ и $a^2b < 0$, то $b < 0$.

70* Докажите, что:

- 1) если $a + b = 4$, то $a^2 - 2b \geq -9$;
2) если $a + b = 4$, то $a^2 + b^2 \geq 8$;
3) если $a + b = 2$, то $4a^2 + 12b - 15 \geq 0$;
4) если $a - b = 4$, то $a^2 + b^2 \geq 8$.

71. Известно, что $6 \leq c < 9$. Оцените значения выражения:

- 1) $-6c$; 2) $-4c$; 3) $3c - 6$; 4) $5c + 4$;
5) $\frac{c}{4} - 5$; 6) $\frac{c}{5} + 2$; 7) $\frac{7}{c}$; 8) $\frac{6}{c}$.

72. Известно, что $2 \leq a \leq 3$ и $4 < b < 5$. Оцените значения выражения:

- | | |
|--------------------|--|
| 1) $0,2b - 0,1a$; | 2) $0,5b - 0,3a$; |
| 3) $a^2 + b^2$; | 4) $a^2 - b^2$; |
| 5) $a^3 - b^3$; | 6) $a^3 + b^3$; |
| 7) $3a^3 - 4b^3$; | 8) $\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}b^3$. |

73*. Какое наибольшее целое значение может принимать выражение:

- 1) $2x - 3y$, если $-1,5 < x < 2$ и $-4 < y < 3,2$;
- 2) $4,6x - 9y$, если $-4 < x < -3$ и $-1 < y < 0,2$;
- 3) $3x - \frac{2}{y}$, если $-2 < x < \frac{1}{3}$ и $0,5 < y < 4$;
- 4) $\frac{1}{x} - 2y$, если $3 < x < 4$ и $-0,2 < y < 0,1$?

74*. 1) Значение выражения $\frac{m}{k+1}$ — целое число. Найдите его, если:

$$1,3 < m < 1,5 \text{ и } 0,4 < k < 0,8.$$

2) Значение выражения $\frac{2+m}{3k}$ — целое число. Найдите его, если:

$$2,3 < m < 3,1 \text{ и } 1\frac{1}{3} < k < 2\frac{2}{3}.$$

75*. Укажите наименьшее и наибольшее значения выражения:

- 1) $\frac{2}{m} - p$, если $0,5 \leq m \leq 3$ и $1,5 \leq p \leq 2,8$;
- 2) $2m - \frac{3}{p}$, если $-2,3 \leq m \leq 3,4$ и $0,5 \leq p \leq 4$;
- 3) $4mp - m$, если $1 \leq m \leq 2$ и $\frac{1}{2} \leq p \leq 4,25$;
- 4) $8m - pt$, если $\frac{1}{4} \leq m \leq 4$ и $2,4 \leq p \leq 2,5$.

76. Если к удвоенному числу прибавить 3, то полученная сумма будет не больше 5, а если к произведению исходного числа и 7 прибавить 12, то сумма окажется не меньше 19. Найдите это число.

77. В актовом зале можно расположить от 23 до 27 рядов, а в каждом ряду может быть от 29 до 35 стульев. Каким может быть число стульев в актовом зале?

78. 1) Урожай картофеля с дачного участка ожидается от 900 кг до 1200 кг, а предполагаемые потери при хранении составляют от 60 до 90 кг. Какой может быть масса сохраненного картофеля?
2) Каждая из 15 закройщиц может за 1 ч выкроить от 3 до 9 изделий, а каждая из 8 швей за 1 ч может сметать от 5 до 12 раскроенных изделий. Каким может быть число не сметанных за час изделий?
79. На прямоугольный планшет размером 175×220 см наклеены 8 фотографий прямоугольной формы размером $a \times b$ см, при этом $9 < a < 15$, $8 < b < 12$. Поверхность планшета, не закрытая фотографиями, должна быть покрашена. Сколько может потребоваться краски, если на покраску площади 1000 см^2 надо 15 г краски?
80. Маргарин, масса которого 10 кг, фасуют по пачкам массой 200 г и 250 г. Количество пачек массой 250 г может быть от 16 до 24. Каким может быть количество пачек массой 200 г?
81. Определите, является ли верным утверждение:
- 1) $-0,9$ есть число, противоположное арифметическому квадратному корню из числа $0,81$;
 - 2) $\frac{1}{3}$ есть число, обратное квадратному корню из числа 9;
 - 3) $-\frac{1}{2}$ есть число, обратное кубическому корню из числа -8 ;
 - 4) $-0,5$ есть число, противоположное корню четвертой степени из числа $0,0625$;
 - 5) сумма корней четвертой степени из числа 16 равна 0;
 - 6) нулевая степень корня седьмой степени из числа 128 равна 1.
82. Является ли число b корнем n -й степени из числа a , если:
- | | |
|--|---|
| 1) $b = 1, a = 1, n = 5$; | 2) $b = -1, a = 1, n = 3$; |
| 3) $b = 1, a = -1, n = 9$; | 4) $b = -1, a = -1, n = 7$; |
| 5) $b = 0,5, a = 2,5, n = 2$; | 6) $b = -0,5, a = 0,25, n = 2$; |
| 7) $b = -1,5, a = 2\frac{1}{4}, n = 2$; | 8) $b = 2\frac{1}{2}, a = -6,25, n = 2$; |
| 9) $b = -2, a = 1024, n = 10$; | 10) $b = 3,2, a = 243, n = 5$; |

83. Укажите для числа 81:

- 1) квадратный корень, который меньше числа -5 ;
- 2) корень 4-й степени, который больше числа 2;
- 3) корни 4-й степени и их произведение;
- 4) квадратные корни и их произведение.

Найдите квадратные корни из числа (84—85).

84. 1) a^8 ; 2) a^{10} ; 3) b^4 ;
4) b^{14} ; 5) t^{12} ; 6) t^{22} .

85. 1) $4a^2$; 2) $9b^4$; 3) a^4b^6 ; 4) c^8d^{12} ;
5) $\frac{49}{a^{12}}$; 6) $\frac{81}{c^{10}}$; 7) $\frac{a^2}{b^8}$; 8) $\frac{a^4}{16c^6}$;
9) $a^2 - 2ab + b^2$; 10) $a^2 + 2ab + b^2$;
11) $9 + 6a + a^2$; 12) $d^2 - 8d + 16$.

86. Найдите квадратные корни из значения выражения:

- 1) $12^2 + 16^2$; 2) $5^2 + 12^2$;
- 3) $17^2 - 8^2$; 4) $50^2 - 14^2$;
- 5) $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2$; 6) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$;
- 7) $\frac{7(12^2 - 5^2)}{17}$; 8) $\frac{15^2 - 6^2}{21}$;
- 9) $4 \cdot 64$; 10) $9 \cdot 25$;
- 11) $25 \cdot 81 \cdot 16$; 12) $4 \cdot 121 \cdot 25$.

87. Существует ли квадратный корень из значения выражения:

- 1) $1 - \frac{9}{25}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$; 3) $16 - 7$; 4) $\frac{-25}{-9}$;
- 5) $\frac{9}{-16}$; 6) $5 - 14$; 7) $3^2 - 7^2$; 8) $5^2 - 4^2$;
- 9) $(-3)^2$; 10) -3^2 ; 11) $(-7^2)^{-2}$; 12) $(-64)^{0?}$

88. Найдите значение выражения (если оно существует):

- 1) $\sqrt{3a + 10}$ при a , равном -4 ; -3 ; -2 ; 2 ;
- 2) $2\sqrt{10 - 2c}$ при c , равном -3 ; 3 ; 5 ; 6 ;
- 3) $\sqrt{-5 - 3k}$ при k , равном -7 ; -3 ; -2 ; 2 ;
- 4) $5\sqrt{-2 + 6p}$ при p , равном 3 ; 1 ; 0 ; -2 .

89. Верно ли равенство:

1) $\sqrt{81 - 2 \cdot 9 \cdot 8 + 64} = 9 - 8$;

2) $\sqrt{16 - 2 \cdot 4 \cdot 6 + 36} = 4 - 6$;

3) $\sqrt{9 - 2 \cdot 3 \cdot 5 + 25} = 3 - 5$;

4) $\sqrt{49 - 2 \cdot 7 \cdot 4 + 16} = 7 - 4$?

90. Верно ли, что произведение любого квадратного корня из 25 и любого квадратного корня из 9:

1) равно значению выражения $\sqrt{25} \sqrt{9}$;

2) больше значения выражения $\sqrt{25} \sqrt{9}$;

3) не больше значения выражения $\sqrt{25} \sqrt{9}$;

4) не меньше значения выражения $\sqrt{25} \sqrt{9}$?

91. Верно ли, что разность любого квадратного корня из 25 и любого квадратного корня из 4:

1) равна 3;

2) больше 3;

3) не меньше -7;

4) не больше -7?

92. При каком значении a верно равенство:

1) $\sqrt{a} = 9$;

2) $-\sqrt{a} = -5$;

3) $6 + \sqrt{a} = 7$;

4) $12 - \sqrt{a} = 9$;

5) $-6\sqrt{a} = -72$;

6) $-\sqrt{a} = -\frac{4}{5}$;

7) $2,9 + 0,2\sqrt{a} = 4,5$;

8) $1 - \sqrt{a} = 0,4$?

Решите уравнение (93—95).

93. 1) $2x^2 + 3 = 53$;

2) $5x^2 - 7 = 73$;

3) $\frac{1}{7}x^2 + 9 = 16$;

4) $\frac{1}{9}x^2 - 10 = -1$;

5) $3x^2 - 120 = 243$;

6) $2x^2 + 12 = 350$;

7) $\frac{1}{2}x^2 + 28 = 100$;

8) $\frac{1}{3}x^2 - 40 = 35$.

94. 1) $(x - 4)^2 = 9$;

2) $(5 - x)^2 = 1$;

3) $(2x + 1)^2 - 4 = 0$;

4) $(3x - 2)^2 = 16$;

5) $(9 - 3x)^2 = 25$;

6) $(1 - 4x)^2 - 40 = 9$.

95. 1) $\sqrt{1 - x} = 2$;

2) $\sqrt{3 - x} = 5$;

3) $\sqrt{x} = -3$;

4) $\sqrt{x} = -12$;

- 5) $\sqrt{-x} = 7$; 6) $\sqrt{-x} = 8$;
7) $2\sqrt{5x+4} = -8$; 8) $-3\sqrt{4-3x} = 15$.

96. Пластина составлена из 8 одинаковых квадратов. Найдите длину стороны квадрата, если известно, что площадь пластины равна:

- 1) 392 см²; 2) 128 см²;
3) 6,48 см²; 4) 13,52 см².

97. Найдите длину ребра куба, если площадь полной поверхности его равна:

- 1) 216 см²; 2) 150 см²;
3) 4,86 см²; 4) 3,84 см².

98. Укажите естественную область определения D выражения:

- 1) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-2}$; 2) $\frac{1}{x-3} + \sqrt{x+2}$;
3) $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \sqrt{x-2}$;
5) $\sqrt{2-x} - \frac{4}{\sqrt{6-x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{8-x}} + \sqrt{10-x}$.

99. Найдите значение выражения при k , равном 0; 2; -2; -3; 3:

- 1) $6\sqrt{k^2}$; 2) $5\sqrt{(k-1)^2}$;
3) $\frac{1}{4}\sqrt{(2-k)^2}$; 4) $0,1\sqrt{(1-k^2)^2}$.

100. Верно ли, что:

- 1) $\sqrt{a^4} = a^2$; 2) $\sqrt{a^8} = a^4$;
3) $\sqrt{\frac{16a^{20}}{25}} = \frac{4|a^{10}|}{5}$; 4) $\sqrt{2\frac{1}{4}a^{26}} = \frac{3}{2}|a^{13}|$?

101. Найдите значение выражения при t , равном -2; -1; 0; 3; 5:

- 1) $\sqrt{t^4}$; 2) $\sqrt{t^6}$;
3) $0,1\sqrt{t^6}$; 4) $\frac{1}{30}\sqrt{t^{10}}$.

102. Вычислите:

1) $\sqrt{19\frac{61}{81} : 121};$

2) $\sqrt{12\frac{132}{289} : 2,25};$

3) $\sqrt{\frac{8\frac{1}{36} \cdot 3\frac{6}{25}}{2\frac{47}{121}}};$

4) $\sqrt{\frac{6\frac{30}{49} \cdot 7^2}{0,0289}}.$

103. Верно ли, что если a — рациональное число, b — иррациональное число, то является рациональным число:

1) $a + b;$ 2) $a - b?$

Если да, то укажите два примера значений a и b , иллюстрирующих ваш ответ.

104. Верно ли, что при любом рациональном a и иррациональном b является иррациональным число:

1) $ab;$ 2) $a : b?$

Если нет, то приведите два примера соответствующих условию значений a и b , при которых ab и $a : b$ — рациональные числа.

Сравните числа (105—106).

105. 1) $\sqrt{26}$ и 4;

2) $\sqrt{23}$ и 14;

3) $-\sqrt{21}$ и $-\sqrt{40};$

4) $-\sqrt{24}$ и $-\sqrt{65};$

5) $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{2};$

6) $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{6};$

7) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ и $\sqrt{23};$

8) $\sqrt{25} + \sqrt{144}$ и $\sqrt{161};$

9) $\sqrt{9}\sqrt{16}$ и $\sqrt{145};$

10) $\sqrt{144} : \sqrt{25}$ и $\sqrt{5,79}.$

106. 1) 5,5 и $\sqrt{29};$

2) $\sqrt{54}$ и 7,5;

3) $\sqrt{38}$ и 6,5;

4) 3,5 и $\sqrt{12};$

5) $\sqrt{290,9}$ и 17,3;

6) $\sqrt{1058,4}$ и 32,4.

107. Докажите неравенство:

1) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ при $a > 0, b > 0;$

2) $\frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{a^2} \geq 2ab$ при $a > 0, b > 0;$

3)* $2a^3 + 1 \geq 3a^2$ при $a > 0;$

4) $\frac{4a^3 + 4a^2 + a + 1}{a\sqrt{a}} \geq 8$ при $a > 0;$

5) $a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

6) $\frac{m+n}{p} + \frac{m+p}{n} + \frac{n+p}{m} \geq 6$ при $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

108. Докажите, что для любых чисел верно утверждение: если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ и $\sqrt{b} > \sqrt{c}$, то $\sqrt{a} > \sqrt{c}$.

109. Расположите числа в порядке убывания:

1) $\sqrt{114}$; $\sqrt{129}$; $\sqrt{111}$; 2) $\sqrt{3,09}$; $\sqrt{3,19}$; $\sqrt{3,01}$;

3) $\sqrt{\frac{4}{11}}$; $\sqrt{\frac{5}{13}}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}$; 4) $\sqrt{\frac{29}{30}}$; $\sqrt{\frac{26}{35}}$; $\sqrt{\frac{23}{29}}$.

Решите неравенство (110—119).

110*. 1) $\sqrt{x} \geq \frac{3}{4}$; 2) $\sqrt{x} \leq \frac{2}{5}$;

3) $\sqrt{x} < 0,7$; 4) $\sqrt{x} > 6$.

111*. 1) $\sqrt{2-x} > 5$; 2) $\sqrt{4-x} \geq 4$;

3) $\sqrt{5+x} < 10$; 4) $\sqrt{3+x} < 6$.

112*. 1) $\frac{2}{\sqrt{9x-18}} < 6$; 2) $\frac{5}{\sqrt{16+4x}} > 2,5$;

3) $\frac{\sqrt{2-3x}}{14} > -1$; 4) $\frac{\sqrt{7x+9}+19}{19} < 1$.

113*. 1) $\sqrt{-x} \leq -4$; 2) $\sqrt{-x} \geq -6$.

114*. 1) $\sqrt{|x-4|} < 2$; 2) $\sqrt{|x+5|} > 7$.

115. 1) $\sqrt{x^2} > 6$; 2) $\sqrt{x^2} < 1$;

3) $\sqrt{(x-1)^2} \leq 2$; 4) $\sqrt{(x-2)^2} \geq 3$.

116. 1) $\sqrt{(x+7)^2} > 0$; 2) $-\sqrt{(4+x)^2} < 0$;

3) $\sqrt{-(3x-21)^2} < 0$; 4) $\sqrt{-(5x+25)^2} > 0$;

5) $-\sqrt{-(12-x)^2} < 0$; 6) $-\sqrt{-(9+x)^2} > 0$.

117. 1) $\sqrt{4+4x+x^2} > 0$; 2) $\sqrt{1+x^2+2x} < 0$;

3) $\sqrt{-1+8x-16x^2} < 0$; 4) $\sqrt{12x-4-9x^2} > 0$.

118. 1) $-\sqrt{10 - 2\sqrt{10}x + x^2} < 0$; 2) $-\sqrt{5 + 4\sqrt{5}x + 4x^2} > 0$;
3) $-\sqrt{-25x^2 - 10\sqrt{3}x - 3} < 0$; 4) $-\sqrt{4\sqrt{5}x - 4x^2 - 5} > 0$.
119. 1) $\sqrt{16x^2 - 8x + 1} > 8$; 2) $\sqrt{100x^2 + 40x + 4} \geq 9$;
3) $\sqrt{25 + 30x + 9x^2} < 7$; 4) $\sqrt{49x^2 - 28x + 4} > 5$.
120. Представьте уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$ при $a > 0$ и укажите старший и средний коэффициенты и свободный член:
- 1) $(x - 1)^2 + 3(x - 1) + 7(x^2 - 1) = 0$;
2) $(x + 2)^2 - 4(x - 1)^2 + 5(2 - x) = 0$;
3) $(3x + 2)^2 = 8 - 7(2x - 5)^2 - 2x^2$;
4) $(2x - 1)^2 = 3(x - 1)^2 - 5x$.
121. Равносильны ли уравнения:
- 1) $3x - 1 = x^2 - 7$ и $3x - 1 - x^2 = -7$;
2) $2x - 3 = x - 5$ и $x = -2$;
3) $2x - 3 = x - 5$ и $4x^2 - 9 = (x - 5)(2x + 3)$;
4) $(x^2 + 1)(x + 3) = (2x - 3)(x^2 + 1)$ и $x + 3 = 2x - 3$?
- Решите уравнение (122—132).
122. 1) $x^2 = 256$; 2) $x^2 = 0,64$; 3) $x^2 = 1,21$;
4) $x^2 = \frac{25}{81}$; 5) $25x^2 = 121$; 6) $64x^2 = 225$.
123. 1) $3x^2 + 11x + 6 = 0$; 2) $4x^2 + x - 3 = 0$;
3) $6x^2 - 7x - 3 = 0$; 4) $3x^2 - 36x + 105 = 0$;
5) $2x^2 - 42 = 0$; 6) $\frac{x^2}{3} - 0,5 = 0$.
124. 1) $x^2 - 6x - 7 = 0$; 2) $x^2 + 6x - 40 = 0$;
3) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 4) $x^2 - 8x - 9 = 0$.
125. 1) $x^2 - x - 12 = 0$; 2) $x^2 + 7x + 3 = 0$;
3) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 4) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
5) $21x^2 + 22x - 8 = 0$; 6) $15x^2 + 34x + 15 = 0$.
126. 1) $(x + 3)(x - 7) + (x + 5)(x - 1) = 72$;
2) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(5x + 2) = 96$;

3) $25(x-2)^2 - (x-10)^2 = (5x+1)(5x-1) + 1$;

4) $(2x+7)(7-2x) - x(x+2) = 49$.

127. 1) $\frac{6x^2+7}{7} - 3 = \frac{5x^2-3}{8}$;

2) $\frac{x^2-4}{5} = 9 - \frac{2x^2-41}{9}$;

3) $\frac{4y^2-3}{2} - \frac{3y^2-4}{6} - \frac{5-2y^2}{12} = 5$;

4) $\frac{9y^2-5}{2} - \frac{3+2y^2}{3} - \frac{8y^2-2}{4} = 2$.

128. 1) $12x^2 + 5x - 2 = 0$;

3) $3x^2 - 10x + 3 = 0$;

5) $-16x^2 + 16x - 4 = 0$;

2) $7x^2 - 19x - 6 = 0$;

4) $5x^2 - 9x - 2 = 0$;

6) $-4x^2 - 20x - 25 = 0$.

129. 1) $x^2 + 12x + 20 = 0$;

3) $x^2 + 12x + 36 = 0$;

5) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

7) $(x+5)^2 - 4 = 0$;

9) $(2x-1)^2 - 18 = 0$;

2) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

4) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$;

6) $x^2 + x - 6 = 0$;

8) $(x-2)^2 - 25 = 0$;

10) $(3x+4)^2 - 50 = 0$.

130. 1) $6x(2x+1) = 5x+1$;

3) $x^2 + 2x - 8 = 2x(x-2)$;

2) $8x(1+2x) = -1$;

4) $3x-1 = 9x(x+1)$.

131. 1) $(x+2)^2 = 3131 - 2x$;

3) $y^2 + 4\sqrt{2}y - 10 = 0$;

5) $4y^2 - 3y - 2\sqrt{3} = 0$;

7) $5y^2 - 2y + 2\sqrt{3} - 15 = 0$;

8) $4y^2 + 4y - 4\sqrt{3} - 12 = 0$.

2) $(x+1)^2 = 7918 - 2x$;

4) $2y^2 - \sqrt{5}y + 1 = 0$;

6) $9y^2 - 2\sqrt{6}y - 2\sqrt{5} = 0$;

132. 1) $x(x+1) + 3(x+1) = 2x^2(x+1)$;

2) $4x^2(8x-2) - x(8x-2) + 8x-2 = 0$.

133. Выделите полный квадрат:

1) $x^2 - 2x - 8$;

3) $x^2 + 4x - 12$;

5) $x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{5}{2}$;

2) $x^2 + 8x + 7$;

4) $x^2 + 2x - 15$;

6) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.

134. Докажите неравенство, используя выделение из трехчлена квадрата двучлена:

- 1) $a^2 + 2a + 2 > 0$; 2) $a^2 - 6a + 10 > 0$;
3) $a^2 > 2a - 5$; 4) $9a^2 + 14 > 6a$.

135. Докажите, что при любом значении x трехчлен принимает положительные значения:

- 1) $3x^2 + 5x + 9$; 2) $16x^2 - 24x + 25$.

136. Докажите, что при любом значении x трехчлен принимает отрицательные значения:

- 1) $-3x^2 + 3x - 11$; 2) $-2x^2 + 5x - 7$.

137*. При каком значении x трехчлен принимает наибольшее значение:

- 1) $-7x^2 + 6x - 2$; 2) $-2x^2 - x - 0,125$?

138*. При каком значении x трехчлен принимает наименьшее значение:

- 1) $x^2 + 6x + 15$; 2) $x^2 - 2x - 8$?

139. При каких значениях t уравнение имеет единственный корень:

- 1) $tx^2 + 4x + 1 = 0$; 2) $x^2 + tx + 9 = 0$;
3) $x^2 + 2(t - 4)x + t^2 + 6t + 3 = 0$;
4) $(5t + 3)x^2 + 2(5t - 3)x + 5t - 4 = 0$?

Решите уравнение относительно x (140—144).

140*. 1) $k^2x^2 + p^2 = 0$; 2) $k^2x^2 - p^2 = 0$;

- 3) $c^2x^2 + \frac{c^2}{k^2} = 0$; 4) $c^4x^2 + \frac{c^8}{t^4} = 0$.

141. 1) $x^4 - 36b^4 - 24b^2 - 4 = 0$;

- 2) $x^4 - 121n^4 - 25 + 110n^2 = 0$ ($n > 1$).

142. 1) $\frac{5+2m}{5-2m} \cdot x^2 - 4m^2 = -25$; 2) $\frac{3n+4}{4-3n} \cdot x^2 + 16 = 9n^2$.

143*. 1) $3x^2 + 2bx - b^2 = 0$; 2) $6x^2 + bx - b^2 = 0$.

144*. 1) $x^2 + 10kx + 9k^2 = 0$; 2) $x^2 - 6kx + 8k^2 = 0$;

- 3) $x^2 + 3kx - 40k^2 = 0$; 4) $x^2 - 13kx + 12k^2 = 0$;

- 5) $x^2 - 10kx - 24k^2 = 0$; 6) $x^2 + 5kx - 6k^2 = 0$;
7) $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$; 8) $x^2 - (k+1)x + k = 0$.

145. Составьте приведенное уравнение по его корням:

- 1) $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$;
2) $x_1 = 5 + \sqrt{7}$, $x_2 = 5 - \sqrt{7}$;
3) $x_1 = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$;
4) $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

146. Укажите корни квадратного уравнения, используя теорему, обратную теореме Виета:

- 1) $x^2 + x - 56 = 0$; 2) $x^2 + 11x - 12 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 9 = 0$;
5) $x^2 + 3234x - 3235 = 0$; 6) $x^2 + 7006x - 7007 = 0$;
7) $x^2 - 10(\sqrt{x})^2 - 24 = 0$; 8) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 42 = 0$;
9) $x^2 - (\sqrt{9x})^2 - 10 = 0$; 10) $x^2 + (\sqrt{5x})^2 - 6 = 0$.

147. Проверьте, являются ли числа x_1 и x_2 корнями уравнения:

- 1) $9x^2 - 20 = 24x$, $x_1 = 3\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$;
2) $9x^2 - 5 = 12x$, $x_1 = 1\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$;
3) $4x^2 - 4x = 15$, $x_1 = 2,5$, $x_2 = -1,5$;
4) $4x^2 - 3 = 4x$, $x_1 = 1,5$, $x_2 = -0,5$.

148. Разложите трехчлен на множители:

- 1) $5x^2 + 17x - 126$; 2) $3x^2 - 7x - 40$;
3) $6x^2 + 5x - 6$; 4) $21x^2 + 22x - 8$;
5) $x^2 - \sqrt{2}x - 1$; 6) $x^2 + \sqrt{2}x - 8$.

149. Сократите дробь:

- 1) $\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 5x - 14}$; 2) $\frac{x^2 - x - 42}{x^2 - 2x - 35}$; 3) $\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - x - 3}$;
4) $\frac{-x^2 + x + 2}{3x^2 + x - 2}$; 5) $\frac{5x + 5}{3x^2 + 2x - 1}$; 6) $\frac{12 - 7a + a^2}{4a - 16}$;
7) $\frac{49 - t^2}{t^2 - 5t - 14}$; 8) $\frac{m^2 - 9m - 10}{m^2 - 100}$.

150. Выполните действия:

- 1) $\frac{a+2}{a+1} + \frac{9a^2-4}{5a^2+a-4} : \frac{3a-2}{5a-4};$
- 2) $\frac{16a^2-9}{3a^2+a-2} : \frac{4a+3}{3a-2} - \frac{a-6}{a+1};$
- 3) $\left(\frac{4,8}{1+a} + \frac{3}{a-4} + \frac{3a}{a^2-3a-4} \right) : \frac{2a-3}{a^2-4a};$
- 4) $\left(\frac{3}{a+1} + \frac{2}{a-5} + \frac{6-a}{a^2-4a-5} \right) : \frac{4a-7}{2a^2-10a}.$

Решите уравнение (151—154).

151. 1) $\frac{4x^3-9x}{x-1,5} = 0;$ 2) $\frac{4x^3-44x^2+21x}{x-6} = 0;$
- 3) $\frac{x^3-2x}{x^2-8} = 0;$ 4) $\frac{3x^2+x^3}{x^2-4} = 0.$
152. 1) $\frac{12}{7-x} = x;$ 2) $4x + \frac{3}{x} = 8;$
- 3) $\frac{15}{x-2} - \frac{14}{x} = 1;$ 4) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x} - 1\frac{1}{4} = 0;$
- 5) $\frac{1}{x} - \frac{3}{20} + \frac{1}{x-3} = 0;$ 6) $1 + \frac{40}{x} = \frac{40}{x-20};$
- 7) $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0;$
- 8)* $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6};$
- 9) $\frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{x^2-21}{x^2-9};$
- 10) $\frac{x^2+4}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} = \frac{3x-2}{x^2-4}.$
153. 1) $27x^4 + 6x^2 - 5 = 0;$ 2) $2x^4 + x^2 - 1 = 0;$
- 3) $2x^4 - 7x^2 - 1 = 0;$ 4) $4x^4 + 7x^2 - 1 = 0;$
- 5) $121x^4 - 144 = 0;$ 6) $225x^4 - 256 = 0;$
- 7) $0,01x^4 - 3,24 = 0;$ 8) $-2x^4 - 6x^2 + 1 = 0.$
154. 1) $x^4 - 9x^2 = 0;$ 2) $25x^2 - x^4 = 0;$
- 3) $0,04x^2 + 0,25x^4 = 0;$ 4) $1,96x^4 + 0,09x^2 = 0;$
- 5) $5x^4 + x^2 = 4;$ 6) $3x^4 = x^2 + 2;$
- 7) $12x^4 = 6 - x^2;$ 8) $6x^4 = 15 + x^2.$

155. Разложите многочлен на множители:

- 1) $x^4 - 29x^2 + 100$; 2) $x^4 - 89x^2 + 1600$;
3) $4x^4 - 5x^2 + 1$; 4) $3x^4 - 28x^2 + 9$.

Решите уравнение (156—166).

156. 1) $(2x - 3)(2x + 3)(4x^2 + 9) = 4x^2 - 75$;

2) $(2x - 1)(1 + 2x)(4x^2 + 1) = x^2 + 1$.

157. 1) $2x^2 - 5|x| + 2 = 0$; 2) $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$;

3) $x^2 + \frac{1}{6}|x| - \frac{7}{6} = 0$; 4) $x^2 - \frac{1}{7}|x| - 1\frac{1}{7} = 0$.

158. 1) $x^2 - 2x + 1 + |x - 1| = 12$;

2) $x^2 + 4x + 4 + |x + 2| = 20$;

3) $2(x^2 - 3x + 2,25) - 3|x - 1,5| = 20$;

4) $3(x^2 + 7x + 12,25) + 4|x + 3,5| = 20$;

5) $x^2 - 6x + 5|x - 3| = 5$;

6) $x^2 + 8x - 3|x + 4| = -12$.

159. 1) $x|x| - 4x - 12 = 0$; 2) $x|x| + 7x + 6 = 0$;

3) $x|x| - 7\sqrt{x^2} - 30 = 0$; 4) $x|x| + 4\sqrt{x^2} - 5 = 0$.

160. 1) $(x^2 - 2x)^2 - 14(x^2 - 2x) - 15 = 0$;

2) $(6x^2 + 7x)^2 - 2(6x^2 + 7x) - 3 = 0$;

3) $(4x^2 + 12)^4 - 11(4x^2 + 12)^2 + 28 = 0$;

4) $(x^2 - 4x)^4 + 9(x^2 - 4x)^2 + 20 = 0$.

161. 1) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$;

2) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$;

3) $\frac{21x}{x^2 - 4x} - \frac{x^2 - 4x}{x} = 4$;

4) $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$.

162. 1) $x^2 + 3x = \frac{8}{x^2 + 3x - 2}$; 2) $x^2 + x + 1 = \frac{15}{x^2 + x + 3}$;

3) $\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \frac{1}{x} = 5$;

4) $\sqrt{\frac{4-x}{x}} + \frac{4}{x} = 7$.

163. 1) $\frac{x^2 - 2x}{4x - 3} + 5 + \frac{4(4x - 3)}{x^2 - 2x} = 0$; 2) $\frac{x^2 + 4x}{7x - 2} - \frac{6(2 - 7x)}{x^2 + 4x} = 7$;

174. Изобразите параболу:

1) $y = (x - 2)^2 + 3$; 2) $y = (x + 4)^2 - 1$.

175. Имеет ли график функции $y = 0,8(x - 6)^2 + 5$ общие точки с прямой:

1) $y = 5$; 2) $y = 6$?

176. Имеет ли график функции $y = -6,2(x + 8)^2 - 3$ общие точки с прямой:

1) $y = 0$; 2) $y = -2$?

177. При каких значениях p данная функция принимает только отрицательные значения:

1) $y = p(x - 4)^2 + 5$; 2) $y = -7(x + p)^2 - 3$;
3) $y = -5(x + 1)^2 - p$; 4) $y = 6(x + 2)^2 - p$?

178. Используя метод выделения полного квадрата, приведите формулу к виду $y = a(x - s)^2 + t$ и изобразите данную параболу:

1) $y = x^2 - 12x - 7$; 2) $y = x^2 - 13x + 1$;
3) $y = -3x^2 + 12x - 9$; 4) $y = -6x^2 - 18x + 5$;
5) $y = x(7 - 0,3x) - 2$; 6) $y = -x(5 + 0,2x) - 5$.

179. Найдите координаты вершины параболы по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$ и изобразите эту параболу:

1) $y = x^2 - 24x + 108$; 2) $y = x^2 + 26x - 120$;
3) $y = x^2 + 34x + 280$; 4) $y = x^2 - 14x - 132$;
5) $y = 18 - x^2 - 7x$; 6) $y = 13x - 30 - x^2$.

180. Укажите координаты вершины параболы и координаты точек ее пересечения с осями Ox и Oy :

1) $y = x^2 - 10x + 27$; 2) $y = x^2 + 6x + 5$;
3) $y = 8x - 15 - x^2$; 4) $y = 14x - x^2 - 45$.

181. Найдите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $y = x^2 + 2x - 8$; 2) $y = x^2 + 2,5x - 9$;
3) $y = 15x^2 + 34x + 15$; 4) $y = 30x^2 + 37x + 10$;
5) $y = -x^2 - 15x - 44$; 6) $y = x^2 - 13x + 22$.

182. Изобразите схематично график функции и укажите ее свойства:

- 1) $y = x^2 - 6x + 8$; 2) $y = x^2 + 4x - 1$;
3) $y = -3x^2 + 6x - 3$; 4) $y = 4x^2 + 4x - 8$.

183. Докажите, что указанная парабола не пересекается с осью Ox :

- 1) $y = 2x^2 - 3x + 10$; 2) $y = 4x^2 + 9x + 15$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$; 4) $y = -2x^2 - 3x - 4$.

184*. Какому координатному углу (координатной четверти) принадлежит вершина параболы $y = mx^2 + px + k$, если:

- 1) $m > 0, p > 0, k < 0$; 2) $m > 0, p < 0, k < 0$?

185*. Укажите знаки чисел a, b, c , если ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, а вершина этой параболы принадлежит:

- 1) II координатному углу (четверти);
2) I координатному углу (четверти);
3) IV координатному углу (четверти);
4) III координатному углу (четверти).

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Основные свойства сложения и умножения

- *Переместительный закон:*

$$a + b = b + a; \quad ab = ba.$$

- *Сочетательный закон:*

$$(a + b) + c = a + (b + c); \quad (ab)c = a(bc).$$

- *Распределительный закон:*

$$(a + b)c = ac + bc.$$

- Существуют числа 0 (нуль) и 1 (единица) такие, что для любого числа a будут верными неравенства:

$$a + 0 = a; \quad a \cdot 1 = a.$$

- Для любого числа a существует противоположное ему число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$.

- Для любого числа $a \neq 0$ существует обратное ему число $a^{-1} = \frac{1}{a}$ такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Определение и свойства степеней с целыми показателями

Определение. При $a \neq 0$, n — натуральном:

- $a^1 = a$
- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (n > 1)$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \geq 1)$

Свойства. При $a \neq 0$, $b \neq 0$ и целых l , m :

- $a^l a^m = a^{l+m}$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $a^l : a^m = a^{l-m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^l)^m = a^{lm}$

Формулы сокращенного умножения

- Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
- Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.
- Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
 $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

- Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
 $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.
- Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
- Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Следствия из формул сокращенного умножения

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
- $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
- $a^2 - b^2 = (a - b)^2 + 2ab$
- $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

Свойства рациональных дробей

- $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$
- $\frac{A \cdot K}{B \cdot K} = \frac{A}{B}$
- $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D + B \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D - B \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$
- $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$

Таблица квадратных корней

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048...$$

$$\sqrt{3} = 1,73205080756887729...$$

$$\sqrt{5} = 2,2360679774997896...$$

$$\sqrt{6} = 2,44948974278317809...$$

$$\sqrt{7} = 2,6457513110645905...$$

$$\sqrt{10} = 3,162277660168379...$$

$$\sqrt{11} = 3,316624790355399...$$

$$\sqrt{13} = 3,605551275463939...$$

$$\sqrt{14} = 3,741657386773941...$$

$$\sqrt{15} = 3,87298334620741688...$$

$$\sqrt{17} = 4,1231056256176605...$$

$$\sqrt{19} = 4,3588989435406735...$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} = 4,472135954999579...$$

ОТВЕТЫ

Глава 1

- 1.1. 1) $-7,1$; $-3,6$; $-2,8$; $1\frac{2}{9}$; $2\frac{1}{4}$; $2,26$.
1.2. 2) $-25(-6) : (-15)$, $-5(-0,8) : 4$, $-8(-4) : 16$.
1.3. 1) Больше; 3) меньше.
1.4. 2) Меньше; 4) меньше; 6) меньше.
1.5. 1) Больше; 3) больше; 5) меньше.
1.6. 2) Меньше; 4) больше.
1.7. 1) Больше; 3) больше; 5) больше.
1.8. 2) Меньше; 4) меньше; 6) меньше.
1.9. 1) Меньше; 3) больше; 5) меньше.
1.10. 2) Больше; 4) больше; 6) меньше.
1.12. Например, 2) $0,8$; 2 ; 10 ; 4) 1 ; 2 ; 3 ; 6) -10 ; -20 ; -30 .
1.13. 1) Да.
1.14. 2) Да.
1.15. 1) $a > b$; 3) $a = b$.
1.16. 2) $c > 0$; 4) $c > 0$; 6) $c < 0$.
1.17. 1) Да; 3) нет; 5) да.
1.18. 2) Нет; 4) да; 6) да.
1.19. 1) Да; 3) да.
1.20. 2) Да; 4) да.
1.21. 1) Нет; 3) да.
1.22. 2) $A < B$; 4) $A < B$.
1.23. 1) $C < D$; 3) $C > D$.
1.24. Например, 2) $A(7)$, $B(6)$, $C(10)$; 4) $M(-10)$, $N(-20)$, $P(-4)$.
1.26. 2) $n > -1$; 4) $n \neq -6$; 6) $n < 12$.
1.28. 2) Да; 4) да.
1.29. 1) Правее; 3) левее; 5) правее; 7) правее.
1.30. 2) K ; 4) E .
1.31. 1) A ; 3) A .
1.32. 2) d , a , b , c ; 4) b , a , c , d .
1.33. 1) Больше; 3) меньше; 5) больше; 7) больше.
1.34. 2) Нет; 4) нет; 6) нет.
1.35. 1) Да; 3) да.
1.36. 2) Нет; 4) нет; 6) нет.
1.37. 1) Нет; 3) да; 5) да; 7) да.
1.39. Например, 1) $x = 2$, $y = 1$; $x = 21$, $y = 1$; 3) $x = 2$, $y = 3$; $x = 18$, $y = 81$;
5) $x = 1$, $y = 1$; $x = 9$, $y = 9$.
1.40. 2) Да; 4) не всегда.
1.41. 1) Да; 3) да.
1.42. 2) Нет; 4) да.
1.43. 1) Нет.
1.44. 2) Меньше; 4) меньше.
1.45. 1) $A > B$.
1.47. 1) $-5,1 < 7,9$; 3) $-16,2 < -3,2$.
1.48. 2) $-b - 1 < -b + 15$; 4) $4n - 6 < 4n + 10$.
1.49. 1) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$; 3) $-1\frac{11}{12} > -2\frac{1}{12}$.

- 1.50. 2) $-6,9 > -20,9$; 4) $5,5 > -8,5$.
1.51. 1) $-k - 21 < -k - 15$; 3) $7m - 4 < 7m + 2$.
1.52. 2) $\frac{15}{28} < \frac{7}{8}$; 4) $-1\frac{32}{35} < -1\frac{23}{40}$.
1.53. 1) $-3a + 3 > 0$; 3) $100 + 3k - 2k^2 < 0$.
1.54. 2) $14n > -15$; 4) $5a > 7$; 6) $k^3 > -1$.
1.55. 1) $(a+b)^2 < a^2 + b^2 + 13$; 3) $(a+b)^2 > a^2 + 5ab - 4$;
5) $(a+b)^2 < -4a^2 + 2ab + 1$.
1.56. 2) $(m-n)^2 < 8mn + n^2 + 3$; 4) $(m-n)^2 > 8 - 2mn$;
6) $(m-n)^2 < m^2 - 10mn + 10$.
1.58. 2) Нет.
1.59. 1) Не всегда; 3) не всегда.
1.60. 2) Меньше. 1.61. 1) Да.
1.62. 2) Нет. 1.63. 1) Да.
1.64. 2) $4 > -7$; $2\frac{2}{3} > -4\frac{2}{3}$; $3,5 > -2$; $14 > -8$; 4) $-\frac{1}{2} < 1\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{3} < \frac{7}{9}$; $-\frac{7}{18} < \frac{1}{6}$;
 $-2\frac{1}{3} < 1$.
1.65. 1) $87 > -12$; 3) $-5,1 < 14,4$; 5) $3p < 3,75k$.
1.66. 2) $0,3 > -0,2$; 4) $0,8 > 0,7$; 6) $-\frac{n}{5} < \frac{5a}{6}$.
1.67. 1) $-p > -1$; 3) $p < -2$.
1.68. 2) $a - b > 2a + 2b$; 4) $(a-b)^2 < a^2 + ab + b^2$.
1.69. 1) $a < 5b$; 3) $(a-b)(a+b)^2 < a - b$.
1.70. 2) Да; 4) нет; 6) да.
1.71. 1) Нет; 3) да; 5) нет.
1.72. 2) Нет; 4) да.
1.73. 1) Да; 3) да; 5) да.
1.74. 2) Меньше; 4) меньше; 6) больше; 8) меньше.
1.75. 1) Меньше; 3) меньше; 5) меньше.
1.76. 2) $\frac{1}{k}$; $\frac{1}{m}$; $\frac{1}{n}$; $\frac{1}{p}$.
1.77. 1) Да; 3) да; 5) нет; 7) да.
1.79. 1) $15 < 19$; 3) $2\frac{1}{6} < 5\frac{1}{5}$.
1.80. 2) $21 < 63$; 4) $6\frac{2}{3} > 1\frac{1}{5}$.
1.81. 1) $8 > 0$; 3) $1 < 15$; 5) $\frac{1}{3} > 0$; 7) $-\frac{1}{8} < \frac{11}{12}$.
1.82. 2) $77 < 117$; 4) $58\frac{1}{2} > 33\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{36} < \frac{2}{5}$; 8) $0,014 > 0,0006$.
1.83. 1) $20 < 150$; 3) $8\frac{1}{36} > 6\frac{1}{100}$; 5) $12 < 80$; 7) $16\frac{1}{64} > 6\frac{1}{36}$.
1.84. 2) $\frac{1}{16} < \frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{54} < \frac{9}{64}$; 6) $1728 > 100$; 8) $1 > \frac{1}{7}$.
1.85. 1) Да; 3) не всегда.
1.86. 2) $2p < p + 7$; 4) $4a^2 + 2a - 3 > 4b^2 + 5$.
1.87. 1) $6k + 24 > k^2$; 3) $y^4 - 3y^2 > 5x^2 + 5x$.

- 1.88. 2) $4ay - 7ax^2 > 80xy^2 - 25x^2y^3$.
- 1.89. 1) $(a+b)^2 > 5a$; 3) $x^2 - y^2 > y^2 + 5$; 5) $a^2 + 2a < b^2 + b$.
- 1.90. 2) $60ab^2(a-2b) > -\frac{4a^2}{2a+3b}$.
- 1.95. 1) $t \geq 5^\circ\text{C}$; 3) $\varphi \leq 60\%$; 5) $l \leq 1000$ км.
- 1.97. 1) $n \leq -1$; 3) $n > 0$; 5) $n > -3$.
- 1.99. 1) $a \leq b$; 3) $a+b \leq 2$; 5) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
- 1.100. 2) Нет; 4) да; 6) да; 8) да.
- 1.101. 1) $5 \geq 2$; 3) $k-8 \leq p+2$; 5) $m + \frac{1}{3} \leq 2m + \frac{1}{9}$.
- 1.102. 2) $6 \leq 24$; 4) $\frac{k}{3} \leq 2,1p$; 6) $5n^2 \geq 4n+28$.
- 1.103. 1) $-5a+5 < 6-4n$; 3) $x^2+2x > 2y+4$; 5) $a+4b < 8$.
- 1.104. 2) Да; 4) нет; 6) да.
- 1.105. 1) Да; 3) нет; 5) да.
- 1.106. 2) $19c-1 \geq 0$; 4) $-a^2+a > 0$; 6) $-24p^2-4p \geq 0$.
- 1.107. 1) $0 \leq 4-4c$; 3) $0 \leq 7c-23$; 5) $0 \geq -83$.
- 1.108. 2) Нет; 4) да; 6) не всегда.
- 1.112. 2) Нельзя; 4) [0; 6]; 6) нельзя.
- 1.113. 1) а) $-1 \leq a \leq 5$; б) $-2 < a < 3$; в) $-3 < a \leq 7$; г) $0 \leq a < 6$; д) $0 < a < 4$;
е) $-4 \leq a \leq 1$; ж) $-100 \leq a < 100$; з) $-7 < a \leq 0$; и) $5 \leq a \leq 16$; к) $-9 < a < 8$.
- 1.114. 2) $\begin{cases} m \geq 13, \\ m \leq 118; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} t > -5, \\ t \leq 12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} p \geq -20, \\ p < 0. \end{cases}$
- 1.115. 1) $5 < a < 7$; 3) $-4 \leq p < 10$.
- 1.116. 2) $\frac{1}{4} < \frac{t}{4} < 1\frac{3}{4}$; 4) $-1 < -\frac{t}{7} < -\frac{1}{7}$; 6) $-2 < t-3 < 4$; 8) $-10 < 4-2t < 2$.
- 1.117. 1) $2 \leq t-10 \leq 10$; 3) $-1 \leq 2t-25 \leq 15$; 5) $9 \leq \frac{t}{4} + 6 \leq 11$;
7) $3 \leq 8 - \frac{t}{4} \leq 5$.
- 1.118. 2) $21 < 7a \leq 35$; 4) $-15 \leq -3a < -9$; 6) $-2 < a-5 \leq 0$; 8) $-5 \leq 10-3a < 1$;
10) $\frac{3}{5} < \frac{a}{5} \leq 1$; 12) $1\frac{1}{5} \leq \frac{1}{a} + 1 < 1\frac{1}{3}$.
- 1.119. 1) $-6 \leq -k \leq -2$; 3) $-12 < -4p < -4$; 5) $-1 < k-p < 5$; 7) $-2 < 5k-4p < 26$;
9) $\frac{1}{3} < \frac{1}{p} < 1$; 11) $\frac{2}{3} < \frac{k}{p} < 6$.
- 1.120. 2) $\frac{1}{12} < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{6} < \frac{y}{x} < 1$; 6) $-\frac{7}{2} \leq -\frac{7}{y} \leq -\frac{7}{4}$;
8) $-7\frac{11}{12} < \frac{1}{x} - 2y < -3\frac{3}{4}$.
- 1.121. 1) $12,8 \leq P \leq 13,2$; $10,24 \leq S \leq 10,89$.
- 1.122. 2) $6 < c < 18$; $12 < p < 18$.
- 1.123. 1) $b > 4$.
- 1.124. От 1350 до 1950.
- 1.125. Наклеек от 226 до 286, марок от 74 до 134.
- 1.131. 1) Да; 3) да; 5) нет.
- 1.132. 2) Да; 4) нет; 6) нет.

Глава 2

- 2.1. 1) Да; 3) нет; 5) нет; 7) да.
 2.2. 2) 0,5(6); 4) 1,70(45); 6) 22,1(6); 8) 5,541(6).
 2.3. 1) Нет; 3) да; 5) нет.
 2.4. 2) 0,(571428); 4) 0,93(18); 6) 4,61(6); 8) 23,(407).
 2.5. Например, 1) 1; 2; 3; 3) 3; 5; 7; 5) 2; 4; 6; 7) 5; 10; 15; 9) 1; 2; 2,5; 11) 6; 12; 18.
 2.6. 2) $\frac{119}{15}$; 4) $\frac{18}{25}$; 6) $-\frac{71}{12}$; 8) $-\frac{21}{25}$.
 2.8. 2) а) Да; б) да; в) да; г) не всегда.
 2.9. 1) Не всегда; 3) не всегда.
 2.10. 2) Да; 4) да; 6) да. 2.11. 1) Да; 3) да; 5) да.
 2.12. 2), 4), 6) а) Например, повторять далее последнюю цифру; б) например, далее писать по порядку все натуральные числа.
 2.13. 1) Больше; 3) меньше; 5) больше; 7) меньше; 9) больше; 11) меньше.
 2.14. 2) а) 8,232323...; б) 8,232323...; 4) а) 3,(702); б) $-3,(702)$.
 2.15. 1) Да; 3) нет. 2.16. 2) М; 4) М; 6) одинаково.
 2.17. 1) Больше; 3) меньше.
 2.19. 1) $m \leq 4,1$ или $m \geq 8,6$; 3) $-12 \leq m \leq -9$ или $-7 < m \leq 0$ или $m \geq 3$; 5) $m < -7$ или $-7 < m < 7$; 7) $-5 \leq m \leq 5$.
 2.20. 2) 9,97975; 9,97976; 4) 103,67757; 103,67758.
 2.21. 1) -29,568; -29,567; 3) -0,411; -0,410.
 2.23. а) $-1 \leq m \leq 2$; в) $-4 < m < 1$; д) $m > 2$; ж) $m \leq 0$ или $3 < m \leq 7$.
 2.25. 1) $(-\infty; 0] \cup (6; +\infty)$; 3) $[4; +\infty)$; 5) $(-5; 2]$; 7) $[0; 4]$; 9) $(-8; 0] \cup [1; 4)$.
 2.26. 2) $[6; 8]$; 4) $[-4; 4]$; 6) $(0; 6]$; 8) $[-10; -8] \cup (-1; +\infty)$.
 2.27. 1) $-2\frac{1}{9} \in (-3; 2\frac{1}{3})$, $-2 \in (-3; 2\frac{1}{3})$, $-1 \in (-3; 2\frac{1}{3})$, $0 \in (-3; 2\frac{1}{3})$;
 3) $-7 \in (-\infty; 6,8]$; $-4,1 \in (-\infty; 6,8]$; $-3 \in (-\infty; 6,8]$; $-2\frac{1}{9} \in (-\infty; 6,8]$;
 $-2 \in (-\infty; 6,8]$; $-1 \in (-\infty; 6,8]$; $0 \in (-\infty; 6,8]$; $2\frac{1}{3} \in (-\infty; 6,8]$; $5 \in (-\infty; 6,8]$;
 $6,8 \in (-\infty; 6,8]$.
 2.28. 2) -6; -3,9; 5; 6,9; 8,3; 4) -6; 8,3.
 2.29. Например, 1) а) 1; 2; 3; -1,1; -1,2; -1,3; б) 7; 8; 9; -7; -8; -9;
 3) а) $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{7}$; -0,7; -0,8; -0,9; б) 1; 2; 3; -2; -3; -4.
 2.30. 2) 7; 8; 4) 0.
 2.31. 1) -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 3) -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2.
 2.32. 2) 15; 4) 5; 6) 2; 8) нет такого числа.
 2.33. 1) -3; 3) -2; 5) 7; 7) нет такого числа.
 2.34. 2) Например, 7,991; 7,992; 7,993; 4) нет; 6) нет.

Глава 3

- 3.1. 1) Да; 3) да; 5) да; 7) да.
 3.2. 2) 0; 1; 2; 4) -5; -3; -1; 0.
 3.3. 1) $x \geq -2$; 3) $x \geq -3$; 5) $x < 14$; 7) $x > 8$; 9) $x \leq 32$.
 3.4. 2) $y < 2$; 4) $x \leq 1$; 6) $x > 6$; 8) $x \leq 2$; 10) $x \leq 0$.
 3.5. 1) $x \geq 2$; 3) $x < 1,5$; 5) $x \leq 0$.

- 3.6. 2) 5; 4) -8; 6) -20; 8) 8.
- 3.7. 1) $a > 6$; 3) $a > 3$; 5) $a < 3,4$; 7) $a < -\frac{32}{17}$; 9) $a < 2$; 11) $a > -\frac{11}{3}$.
- 3.8. 2) $a < 5$; 4) $a < 0,5$; 6) $a > \frac{19}{14}$; 8) $a < \frac{3}{8}$; 10) $a > \frac{9}{14}$.
- 3.9. 1) $x > 0$; 3) $x \leq -\frac{7}{13}$.
- 3.10. 2) $x \geq -0,5$; 4) $x > 3$; 6) $x \geq 4$; 8) $x < 2,25$.
- 3.11. 1) $c \geq 1,25$; 3) $p > 0,96$.
- 3.12. 2) 4; 4) -8.
- 3.13. 1) 2; 3) 8; 5) его нет.
- 3.14. 2) Нет решений; 4) x — любое; 6) z — любое; 8) нет решений; 10) нет решений.
- 3.15. 1) x — любое; 3) нет решений; 5) нет решений; 7) x — любое.
- 3.16. 2) x — любое; 4) нет решений.
- 3.17. 1) $y > 0$; 3) $y \geq 0$; 5) -4; 7) -2; 9) y — любое; 11) нет решений.
- 3.18. 2) $x < 55$.
- 3.19. 1) $x < 0,4$.
- 3.20. 2) $x \leq 2$; 4) $x > -1,2$.
- 3.21. 1) $a < -6$; 3) $a \geq 9$.
- 3.22. 2) $x < 4$; 4) $x < 0,2$; 6) $x \geq -7$.
- 3.23. 1) $x < 3,5$; 3) $x < 0,75$; 5) $x < 3$; 7) $x \geq 0,6$.
- 3.24. 2) $m > 2,8$; 4) $m \geq 0,2$.
- 3.25. 1) $c > 2,5$; 3) $0 \leq c \leq 10$.
- 3.26. 2) k — любое; 4) $k < 0$; 6) $k \neq 0$; 8) нет решений.
- 3.27. 1) $x \leq \frac{2}{k}$; 3) $x < \frac{p-8}{5}$; 5) $x \geq -\frac{1}{p+3}$; 7) $x > \frac{c}{k-1}$.
- 3.28. 2) $(-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$.
- 3.29. 1) $x > 7$; 3) $x > 6$; 5) $x \leq -1$; 7) $1 < x < 4$; 9) нет решений.
- 3.30. Например, 2) $\begin{cases} 3y > 0, \\ 2y < 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2t + 18 \geq 0, \\ 5t + 34 \geq 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2p \leq 26, \\ 3p + 3 > 0; \end{cases}$
- 8) $\begin{cases} 17x + 29 < 45, \\ 3x + 72 < 0. \end{cases}$
- 3.31. 1) $-3 \leq x < 5$; 3) нет решений; 5) 3; 7) нет решений.
- 3.32. 2) $6 < x \leq 8$; 4) $-5 < x < 12$.
- 3.33. 1) Нет решений; 3) $0 < x \leq 2,5$.
- 3.34. 2) $x < 0,64$; 4) $x > -4\frac{4}{7}$.
- 3.35. 1) -3; -2; -1; 0; 1.
- 3.36. 2) (-5; 7); 4) [3; 4).
- 3.37. 1) [-3; 5) $\cup$ (7; $+\infty$).
- 3.39. 1) $-1 \leq x \leq 2$; 3) $-3,5 \leq x < 0,5$; 5) $9 < x \leq 18$; 7) $6 \leq x < 12$; 9) $-10 \leq x < 0$;
- 11) $-3\frac{1}{3} \leq x \leq 6\frac{2}{3}$.
- 3.40. 2) $1 < x \leq 6$; 4) $3 < x < 9$; 6) $-10 \leq x \leq -1$; 8) $-2,8 < x < -1,8$;
- 10) $9 \leq y < 12$.
- 3.41. 1) $0,75 \leq y < 3$; 3) $-11 < x < 9$; 5) $-1 < y < 1$; 7) $\frac{2}{3} < x \leq 1\frac{2}{3}$.

- 3.42. 2) $\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{16} < x \leq \frac{1}{8}$.
- 3.43. 1) -2; 3) -6.
- 3.44. 2) -4; 4) -10.
- 3.45. 1) а) $p > 0$; б) $\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{2}$; 3) а) $p > -1$; б) $-0,6 < p \leq -0,4$.
- 3.46. 2) а) $p < -3$; б) $-4 \leq p < -2$; 4) а) $p < -0,75$; б) $-1,25 \leq p < -0,25$.
- 3.47. 1) 57; 2) 85.
- 3.48. 2) $|x| > 1$; 4) $|x| \leq 2,75$.
- 3.49. 1) $-5 < x < 5$; 3) $x \leq -3,5$ или $x \geq 3,5$; 5) $-1 \leq x \leq 7$.
- 3.51. 1) Нет; 3) нет; 5) нет.
- 3.52. 2) Нет; 4) нет.
- 3.53. 1) Нет; 3) не всегда; 5) не всегда; 7) да.
- 3.54. 2) -4,2; 4,2; 4) $x < -3$ или $x > 3$; 6) $-8 \leq x \leq 8$.
- 3.55. 1) Нет решений; 3) $y = 0$; 5) $y < -2$ или $y > 2$; 7) $-0,1 \leq y \leq 0,1$; 9) $y \neq 0$;
11) y — любое.
- 3.56. 2) $-9 < x < 1$; 4) $x \leq -1$ или $x \geq 11$; 6) $-2,9 \leq x \leq -0,9$; 8) $-1 < x < 2$.
- 3.57. 1) $x < -4$ или $x > 4$; 3) $-27 < x < 27$; 5) $x \leq -\frac{1}{20}$ или $x \geq \frac{1}{20}$;
7) $-9 \leq x \leq 9$.
- 3.58. 2) $x \leq -5\frac{1}{3}$ или $x \geq 10$; 4) $-7,75 \leq x \leq 9$; 6) $-11\frac{1}{3} < x < 6$; 8) $x \leq -17$ или
 $x \geq 26$; 10) $-45 < x < 33$.
- 3.59. 1) x — любое; 3) $x \neq -3$; 5) нет решений; 7) x — любое; 9) -4.
- 3.60. 2) $x \leq -4$, $4 \leq x < 5,5$; 4) $-7 < x \leq -3$ или $3 \leq x < 7$; 6) $x \leq -13$ или
 $1 \leq x < 2,5$ или $x > 2,5$.
- 3.61. 1) $x < -5$ или $x > 5$; 3) $-10 \leq x \leq 10$.

Глава 4

- 4.1. 1) Нет; 3) да; 5) да; 7) нет.
- 4.2. 2) Нет; 4) да; 6) нет.
- 4.3. 1) -125; 3) 64; 5) 1.
- 4.4. 2) -29; 29; 4) -5; 5; 6) -3003; 3003.
- 4.5. 1) $-2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; 3) -0,6; 0,6; 5) $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$.
- 4.6. 2) Нет; 4) да.
- 4.7. 1) Нет; 3) да; 5) да.
- 4.8. Например, 2) $(\frac{4}{5})^2$; 4) $(-10)^2$.
- 4.9. 1) Да; 3) нет.
- 4.10. 2) 11 мм; 4) $1\frac{1}{4}$ м; 6) 0,01 см.
- 4.11. 1) 3 см; 3) $\frac{2}{5}$ дм; 5) 0,4 м.
- 4.12. 2) Нет; 4) нет; 6) нет; 8) нет; 10) да.
- 4.13. 1) Да; 3) нет; 5) нет; 7) да; 9) да; 11) нет; 13) нет.
- 4.14. 2) 0,1; 4) 0,05; 6) 0,08.
- 4.15. 1) 3; 3) 4; 5) 9; 7) 87,5; 9) 2.

- 4.16. 2) 17; 4) 10; 6) 9; 8) 2; 10) 3.
 4.17. 1) 6; 3) 4; 5) 6; 7) 6; 9) 9.
 4.18. 2) Нет; 4) да; 6) нет; 8) да; 10) нет; 12) нет; 14) да; 16) нет.
 4.19. 1) Да; 3) нет; 5) нет.
 4.20. 2) 0,3; 4) 11.
 4.21. 1) 9,25; 3) 1.
 4.22. 2) Больше; 4) больше.
 4.23. 1) Больше; 3) меньше.
 4.24. 2) 0; 4) $\pm 0,6$; 6) $\pm \frac{5}{7}$; 8) ± 10 ; 10) нет корней; 12) ± 4 .
 4.25. 1) 4; 3) 27; 5) 24.
 4.27. 1) $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; π .
 4.28. 2) $x \leq 5$; 4) R ; 6) R .
 4.29. 1) $(-\infty; 5]$; 3) $[-\frac{1}{8}; +\infty)$.
 4.30. 2) $(-5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2,5]$.
 4.31. 1) $[4; +\infty)$; 3) $[2; 3]$.
 4.32. 2) $(5; 7) \cup (7; 12]$; 4) $[-4; 7) \cup (7; 9)$.
 4.33. 1) 0,3; 3) 0,5; 5) $-0,2$; 7) 5; 9) $5\frac{1}{4}$.
 4.34. 2) 0,354; 4) $5\frac{6}{11}$; 6) 1,23.
 4.35. 1) 7; 3) $2\frac{29}{42}$.
 4.36. 2) Нет; 4) да; 6) нет; 8) да.
 4.37. 1) Да; 3) нет.
 4.38. 2) 1; 4) 2.
 4.39. 1) $\sqrt{15} - 3$; 3) $8 - \sqrt{17}$.
 4.40. 2) 100; 4) 50.
 4.41. 1) 3; 3) 4; 5) 1; 7) 1.
 4.42. 2) 16; 4) 343; 6) 16 807; 8) 25.
 4.43. 1) 2744; 3) 625; 5) 125.
 4.44. 2) 27; 4) 49; 6) 81.
 4.45. 1) $4a^8b^7$.
 4.46. 2) Да; 4) да.
 4.47. 1) p ; 3) p^2 ; 5) p^2 ; 7) p^3 .
 4.48. 2) $-p^3$; 4) p^{14} ; 6) p^{26} ; 8) 1.
 4.49. 1) x ; 3) $-\frac{y}{4}$; 5) $-0,2t^2$; 7) $-b$; 9) $-n^3$.
 4.50. 2) $a - 3$; 4) $-9a - 1$.
 4.52. 2) 10.
 4.53. 1) 140; 136.
 4.54. 2) а) $A > 1$; б) $A = 1$; в) $A > 1$.
 4.55. 1) 20; 3) 0.
 4.56. 2) $4 - 2\sqrt{3}$; 4) -1 .
 4.57. 1) 1.
 4.58. 2) $-a - 2$.

- 4.59. 1) $\frac{1}{3}$; 3) 2.
4.60. 2) $2 + \sqrt{7}$; 4) $\sqrt{5} - 1$.
4.61. 1) $5\sqrt{3} - 5$; 3) $9\sqrt{5} + 9$.
4.62. 2) $(-\infty; 0]$; 4) $[0; +\infty)$; 6) $(-\infty; 0]$.
4.63. 1) $t \geq 5$; 3) $t \leq 5$; 5) t — любое.
4.64. 2) $a \leq 3$.
4.65. Нет.
4.66. 2) Нет корней; 4) -15 ; 3.
4.67. 1) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-3; 5]$.
4.68. 2) $(8; +\infty)$; 4) $[3; 15]$.
4.69. 1) $(-\infty; -3]$; 3) $(-\infty; -4)$.
4.70. 2) 6.
4.71. 1) 20; 3) 24; 5) 360; 7) 1300; 9) 36 000.
4.72. 2) 4,8; 4) 21; 6) 2,4; 8) 0,14; 10) 0,065.
4.73. 1) 0,6; 3) 0,05.
4.74. 2) 22,4; 4) 0,055; 6) 71,25.
4.75. 1) 8; 3) 36; 5) 3.
4.76. 2) 90; 4) 90; 6) 30; 8) 360; 10) 46 410.
4.77. 1) 6,5; 3) 6; 5) 6,5.
4.78. 2) 14; 4) 21; 6) 15; 8) 4,2; 10) 40; 12) 70.
4.79. 1) 450; 3) 1700; 5) 0,23; 7) 4,9; 9) 0,59.
4.80. 2) 2500; 4) 0,045; 6) 65 000; 8) 8,5.
4.81. 1) 375; 3) 77 760; 5) 172 800; 7) 700.
4.82. 2) 192; 4) 0,125.
4.83. 1) $24mn$; 3) $3150m^5n^4$.
4.84. 2) $7b^3y^{12}$; 4) $100m^2$; 6) $9x^2y^{10}$; 8) $0,3(m-n)$.
4.85. 1) 147; 3) 180; 5) 16.
4.86. 2) $3t^2$; 4) $-\frac{k^3}{3}$; 6) $n^2p\sqrt{p}$; 8) $km^6p\sqrt{-t}$.
4.87. Например, 1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$; 3) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{x}$; 5) $\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$; 7) $\sqrt{-m} \cdot \sqrt{-k-p}$.
4.88. 2) 80; 4) 25.
4.89. 1) 96; 3) 60; 5) 35; 7) 0,45.
4.90. 2) 27; 4) 4; 6) 25; 8) 1.
4.91. 1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; 3) $-3\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{5}$; 7) 1,5; 9) $\sqrt{3}$; 11) $3\sqrt{3}$.
4.92. 2) $t\sqrt{t}$; 4) $\frac{\sqrt{p}}{p^2}$; 6) $\sqrt{a+b}$.
4.93. 1) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$; 3) $-\frac{5\sqrt{3}+6}{13}$; 5) $11 + 2\sqrt{30}$; 7) $\frac{\sqrt{21}+4\sqrt{7}-4\sqrt{3}-7}{4}$; 9) $\sqrt{33}$.
4.94. 2) $\frac{3c(\sqrt{c} + \sqrt{p})}{c-p}$; 4) $\sqrt{t} - \sqrt{a}$.
4.95. 1) $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$; 3) $\frac{a(\sqrt{a}+1)}{1-a}$; 5) $2\sqrt{3}-3$; 7) $\frac{6+2\sqrt{6}}{3}$;
9) $(\sqrt{a}+1)\sqrt{1-\sqrt{a}}$.

- 4.96. 2) $\frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{10}}{2}$; 4) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3$;
8) $4\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.
- 4.97. 1) 7,2; 3) $-\sqrt{5}$; 5) $\pm 3\sqrt{3}$.
- 4.98. 2) Нет корней; 4) 8; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.
- 4.99. 1) 21 дм; 3) 33 м.
- 4.100. Среднее арифметическое в задании: 2) больше; 4) больше; 6) больше.
- 4.101. 1) $\frac{1}{26}$; 3) $1\frac{1}{4}$; 5) $2\frac{1}{2}$; 7) $1\frac{5}{6}$.
- 4.102. 2) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{2}{5}$.
- 4.103. 1) $6\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{3}{4}$; 5) $\frac{9}{35}$.
- 4.104. 2) 2; 4) 1; 6) $\frac{1}{10}$.
- 4.105. 1) $1\frac{23}{40}$; 3) $\frac{52}{77}$.
- 4.106. 2) $3\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 9$; 4) $11 - 3\sqrt{2}$.
- 4.107. 1) $15 + 12\sqrt{2}$; 3) 22,5.
- 4.108. 2) $1\frac{5}{49}$; 4) $\frac{1}{75}$.
- 4.109. 1) 12; 3) 11; 5) 2,2.
- 4.110. 2) В 5 раз; 4) в 9 раз.
- 4.111. 1) $5\frac{5}{11}$; 3) 3,6; 5) 1.
- 4.112. 2) В 2 раза; 4) 50 м.
- 4.113. 1) $\frac{4a}{13b^3}$; 3) $\frac{6a^5}{5b^{13}}$; 5) $-\frac{37a^{15}}{44b^6}$.
- 4.114. 2) $\frac{7}{5b}$; 4) $-\frac{30b^3}{a^2}$; 6) $-\frac{13}{12a^3b^5}$.
- 4.115. 1) $\frac{7|k|^3}{9}$; 3) $-75m^5n^9$.
- 4.116. 2) 720; 4) 64.
- 4.117. 1) $\frac{a^m}{b^{2n}}$; 3) $\frac{a^{3m+1}}{b^{2n+2}}$.
- 4.118. 2) $\frac{\sqrt{7a}}{2\sqrt{b}}$; 4) $\frac{\sqrt{5p}}{3\sqrt{-t}}$.
- 4.119. 1) $-p\sqrt{-m}$; 3) $\frac{-m^3}{n\sqrt{n}}$; 5) $-m^7n^3\sqrt{-mn}$.
- 4.120. 2) $0 \leq t < 2$; 4) $t \geq 6$; 6) $t < 0$.
- 4.121. 1) -0,7; 3) -11; 9; 5) -1; 11.
- 4.122. 2) $-5 \leq x < 0$; $0 < x \leq 5$; 4) $x < -6$; $x > -2$; 6) $-7 < x < 1$; $1 < x < 9$.
- 4.123. 1) $5\sqrt{2}$; 3) $5\sqrt{5}$; 5) $6\sqrt{2}$; 7) $6\sqrt{5}$; 9) $2\sqrt{14}$; 11) $0,4\sqrt{2}$.

- 4.124. 2) -2 ; 4) $24\sqrt{6}$; 6) $10\sqrt{2}$; 8) $2\sqrt{5}$; 10) $-0,5\sqrt{6}$; 12) $7\sqrt{3}$.
- 4.126. 2) $3\sqrt{2n}$; 4) $7\sqrt{c}$; 6) $b\sqrt{5a}$; 8) $\sqrt{13}p^3$.
- 4.127. 1) $\frac{\sqrt{k}}{11}$; 3) $\frac{a^2}{b\sqrt{b}}$; 5) $\frac{12\sqrt{x}}{y^2\sqrt{y}}$.
- 4.128. 2) $5k^2\sqrt{3k}$; 4) $7k^4\sqrt{k}$; 6) $4kt^2\sqrt{2kt}$; 8) $6k^2t^5\sqrt{2t}$.
- 4.129. 1) $\frac{7}{ty}\sqrt{\frac{k}{t}}$; 3) $k^3\sqrt{5k}$; 5) $\frac{t^3}{k}\sqrt{\frac{t}{3}}$; 7) $\frac{4p^3}{c^3}\sqrt{2p}$; 9) $\frac{2k^9}{3\sqrt{t}}$.
- 4.130. 2) $a^2c\sqrt{ab}$; 4) $a^3bc^2\sqrt{abc}$; 6) $5a^2b^4c^5\sqrt{bc}$.
- 4.131. 1) $-3a$; 3) $-15\sqrt{2b^3}$; 5) $-7a^2b^5$; 7) $-8b^5d^2$; 9) $-2\frac{1}{4}x^9y^{11}\sqrt{y}$.
- 4.132. 2) $-4mn^2$; 4) $-5\sqrt{2mn^3}\sqrt{m}$; 6) $-8\sqrt{2m^4n^3}$; 8) $2\sqrt{2}c^8d^{12}$;
10) $5\sqrt{5}c^4d^{10}$.
- 4.133. 1) $a^nb^{2m}c^2\sqrt{c}$; 3) $a^{2n+2}b^{m+1}c^4\sqrt{c}$.
- 4.134. 2) $7\sqrt{5}a(a-b)y^2\sqrt{a(a-b)y}$; 4) $\frac{7\sqrt{2}}{2}x^2y^2(x-y)^3\sqrt{y(x-y)}$;
6) $\frac{|5x-y|}{\sqrt{7}}$; 8) $-2\sqrt{2}$.
- 4.135. 1) $-b\sqrt{-3b}$; 3) $-4m^3\sqrt{-2m}$; 5) $-3a^7\sqrt{-3a}$.
- 4.136. 2) $-24t^{11}\sqrt{-2t}$; 4) $b^2\sqrt{-3b}$; 6) $\frac{d^{11}}{3}\sqrt{-\frac{d}{3}}$.
- 4.137. 1) $\sqrt{27}$; 3) $-\sqrt{16,2}$; 5) $\sqrt{0,32}$; 7) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; 9) $\sqrt{0,2}$.
- 4.138. 2) $\sqrt{9b^8c}$; 4) $\sqrt{49c^2d^2}$; 6) $-\sqrt{16t^3}$.
- 4.139. 1) $\sqrt{3p^2}$; 3) $\sqrt{p^3}$; 5) $\sqrt{p}$; 7) $\sqrt{18kp^4}$; 9) $\sqrt{2kp}$; 11) $\sqrt{p(p+1)^2}$.
- 4.140. 2) $\sqrt{7p^2}$; 4) $-\sqrt{7p^2}$; 6) $\sqrt{kp^2}$; 8) $\sqrt{81kp^{10}}$; 10) $-\sqrt{3k^3p^2}$;
12) $-\sqrt{\frac{2k}{3p^2}}$.
- 4.141. 1) $-\sqrt{5p^2}$; 3) $\sqrt{5p^2}$; 5) $\sqrt{kp^2}$; 7) $-\sqrt{49kp^6}$; 9) $\sqrt{\frac{k^3}{2}}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{5kp^4}}$.
- 4.142. 2) $\sqrt{\frac{40a^3}{49}}$; 4) $\sqrt{3ab^3}$; 6) $-\sqrt{-4a^3}$.
- 4.143. 1) $-\sqrt{3a^3}$; 3) $-\sqrt{5m^{11}}$.
- 4.144. 2) $\sqrt{5np^6}$; 4) $-\sqrt{7n^8p^8}$; 6) $-\sqrt{2np^8}$; 8) $\sqrt{11np^4}$.
- 4.145. 1) $-\sqrt{38-12\sqrt{10}}$; 3) $\sqrt{140-50\sqrt{3}}$; 5) $-\sqrt{99-24\sqrt{17}}$;
7) $-\sqrt{(7-4\sqrt{3})ab}$.
- 4.146. 2) $-\sqrt{n-m}$; 4) $-\sqrt{2a(a+b)x^2}$; 6) $\sqrt{\frac{18m(c-d)}{c+d}}$.
- 4.147. 1) $\sqrt{a+1}$; 3) $\sqrt{27b+18}$; 5) $\sqrt{a-b}$; 7) $\sqrt{\frac{b-7}{3}}$.
- 4.148. 2) $\sqrt{27x} + \sqrt{12x} + \sqrt{32x}$.

- 4.149. 1) а) 1; б) -1.
 4.150. 2) $a \leq 0$; 4) $a > 0$.
 4.151. 1) $p \leq 0$; 3) $p \geq 0$; 5) p — любое.
 4.152. 2) $p \leq 0$; 4) p — любое; 6) $p \geq 0$.
 4.153. 1) p — любое; 3) $p \leq 0$; 5) p — любое.
 4.154. 2) $4ab^6\sqrt{2a}$; 4) $3a^2b^2\sqrt{-6a}$; 6) $2x^8y^2\sqrt{y}$.
 4.155. 1) $-\sqrt{x^7y^5}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{2}x^9y^{13}}$; 5) $-\sqrt{x^5y^7}$.
 4.156. 2) $5\sqrt{2}$; 4) $10\sqrt{5}$; 6) $17\sqrt{7}$; 8) $7\sqrt{2}$.
 4.157. 1) $53\sqrt{2}$; 3) $16\sqrt{7}$.
 4.158. 2) Нет; 4) нет.
 4.159. 1) $-13\sqrt{2} - \sqrt{3}$; 3) $9\sqrt{5} - \sqrt{7}$; 5) $12\sqrt{2} + 96\sqrt{3}$.
 4.160. 2) $(2y - 3x^2y^3 + 1,5)xy\sqrt{xy}$.
 4.161. 1) $(m + n)\sqrt{m - n}$; 3) $(1 - m)m$.
 4.162. 2) $(y - \sqrt{13})(y + \sqrt{13})$; 4) $(p - \sqrt{22})(p + \sqrt{22})$; 6) $(\sqrt{7} - d)(\sqrt{7} + d)$;
 8) $(b - 2\sqrt{2})(b + 2\sqrt{2})$.
 4.163. 1) $y - \sqrt{5}$; 3) $\frac{1}{k + \sqrt{2}}$; 5) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
 4.164. 2) $\sqrt{3}(\sqrt{3a} + 1)$; 4) $\frac{3a + \sqrt{b}}{3a - \sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{n} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{n} - 2\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{y} + \sqrt{13}}{\sqrt{y} - \sqrt{13}}$.
 4.165. 1) 625; 3) $22\frac{9}{16}$; 5) 9.
 4.166. 2) 49; 4) 169. 4.167. 1) 169; 3) 81.
 4.168. 2) 2401; 4) 16. 4.169. 1) 100; 3) нет корней.
 4.170. 2) 25; 4) 4. 4.173. 1) $2\sqrt{3}$; 3) 1.
 4.174. 2) $\frac{4}{11}$; 4) $\frac{12 + 16\sqrt{3}}{39}$.
 4.175. 1) 1. 4.176. 2) 0; 4) $(a - 1)^2$.
 4.177. 1) $-\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{1 - a^2}$. 4.178. 2) $-2\sqrt{a}$.
 4.179. 1) $2\sqrt{2\sqrt{10}}$. 4.180. 2) 2,8; 4) $8\frac{8}{9}$.
 4.181. 1) 48; 3) -70; 5) 18. 4.182. 2) -4; 4) 40; 6) 0.
 4.183. 1) -440; 3) 13 000; 5) 4029.
 4.184. 2) $19 - 8\sqrt{3}$; 4) $37 + 20\sqrt{3}$; 6) $21 + 14\sqrt{2}$.
 4.185. 1) 2; 3) 5; 5) 20; 7) $33 - 13\sqrt{10}$.
 4.186. 2) $16\sqrt{6} - 5$.
 4.187. 1) 2,5; 3) 0,4; 5) $-\frac{2}{3}$.
 4.188. 2) $\sqrt{58}$; 4) 18.
 4.189. 1) Имеет; 3) имеет; 5) имеет; 7) не имеет.
 4.190. 2) $\frac{1}{3}$; 4) 10; 6) нет корней; 8) $2\frac{2}{7}$.
 4.192. 2) Нет; 4) нет; 6) да; 8) нет.
 4.193. 1) Нет; 3) да; 5) нет.

- 4.194. 2) Да; 4) да.
4.195. Например, 1) 4; 9; 3) 2; 5; 5) нет двух значений, есть 0.
4.196. 2) Нет, например, $1 - \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{48}$ и $4\sqrt{3}$; 4) нет, например, $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$; $\sqrt{3} - 5$ и $7\sqrt{3} - 35$.
4.197. 1) Нет; 3) да, например, 2 и 3; $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{9}$.
4.198. 2) Меньше; 4) меньше; 6) больше.
4.199. 1) Меньше; 3) больше; 5) меньше.
4.200. 2) Равны; 4) больше.
4.201. 1) Больше; 3) меньше.
4.202. 2) Больше; 4) меньше.
4.203. 1) 1 и 2; 3) 4 и 5; 5) 8 и 9; 7) 16 и 17.
4.204. 2) -6; -5; -4; 4) 1; 2; 3; 4; 5.
4.205. 1) 2; 3) 12; 5) 15.
4.206. 2) 4; 4) 17; 6) 32.
4.207. 1) Да; 3) да; 5) да; 7) да.
4.208. 2) Да; 4) нет.
4.209. 1) $\sqrt{7}$; $\sqrt{9,9}$; $\sqrt{12}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{7}{8}}$; $\sqrt{\frac{11}{12}}$.
4.210. 2) $-\sqrt{75}$; $-\sqrt{27}$; $\frac{1}{7}\sqrt{147}$; $\frac{3}{8}\sqrt{432}$; $100\sqrt{48}$.
4.212. 2) Нет; 4) нет.
4.219. 1) $x > 4$; 3) $x > 0$; 5) $0 \leq x \leq 0,81$; 7) $x \geq 0$.
4.220. 2) $x > 14$; 4) $-8 \leq x \leq -4$.
4.221. 1) $x = 2$; 3) $x \geq -2$; 5) $x \geq 0,5$; 7) нет решений.
4.222. 2) $x > 1\frac{5}{24}$; 4) $\frac{23}{64} \leq x < \frac{3}{4}$.
4.223. 1) $x \leq 0$; 3) $x \leq 0$; 5) $x \leq -4$.
4.224. 2) $-4 \leq x \leq 4$; 4) $x < -12$ и $x > 20$; 6) $x < -2$ и $x > 8$.
4.225. 1) $x = -3$; 3) $x \neq 1$.
4.226. 2) x — любое; 4) $x = 3$; 6) $x = -1$.
4.227. 1) -3; 3) 7.
4.228. 2) x — любое; 4) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.
4.229. 1) $x < -4$ и $x > 8$; 3) $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$.
4.230. 2) $9 < x < 16$; 4) $1 < x \leq 25$; 6) $3 \leq x < 8$.

Глава 5

- 5.1. 1) 2; 6; -8; 3) 3; 0; -21; 5) -1; -1; 0; 7) -1; -4; 3; 9) 31; 0; 0; 11) 4; 18; 0.
5.2. 2) 21; -4; -8; 4) 24; -69; 124; 6) 24; -9; 9.
5.3. 1) -1; 1; 3) 1; 4) 5; 5) -3; 3.
5.4. 2) $\pm 0,2$; 4) нет корней; 6) 0.
5.5. 1) ± 10 ; 3) ± 5 ; 5) нет корней.
5.6. 2) $\pm 1,25$; 4) ± 2 ; 6) ± 8 .
5.7. 1) $\pm\sqrt{3}$; 3) $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$; 5) $\pm\sqrt{1,6}$.
5.8. 2) 3; 4) -0,7; 6) 0,25.

- 5.9. 1) 0; 1; 3) -2; 0; 5) 0; $1\frac{1}{3}$; 7) -6; 0; 9) $-\frac{1}{343}$; 0.
- 5.10. 2) $-\frac{5}{12}$; 0; 4) -1,5; 0; 6) 0; 6.
- 5.11. 1) 0; 6,2; 3) -1,5; 0; 5) 0; 2; 7) $\frac{3}{7}$; 0.
- 5.12. 2) -2; 0; 4) 0; 2; 6) $-\frac{7}{9}$; 0; 8) нет корней.
- 5.13. 1) $\pm\sqrt{87}$; 3) $-8\frac{2}{3}$; 0; 5) ± 2 .
- 5.14. 2) 0; $3\frac{3}{7}$; 4) ± 3 ; 6) ± 2 .
- 5.15. 1) $\pm\sqrt{13}$; 3) $\pm\sqrt{10}$.
- 5.16. 2) 0; 4) $-\frac{3}{8}$; 0; $\frac{3}{8}$.
- 5.17. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) ± 8 .
- 5.18. 2) а) $t > 0$; б) $t = 0$; в) $t < 0$.
- 5.19. 1) $\pm p$; 3) $\pm\sqrt{-\frac{k}{2}}$, если $k < 0$; 0, если $k = 0$; нет корней, если $k > 0$;
 5) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{ck}}$, если c и k отличны от 0 и одного знака; если $c = k = 0$
 или если c и k разных знаков, то нет корней.
- 5.20. 2) $\pm(k-3)$; 4) $\pm(2t+3)$; 6) $\pm(5a^2-1)$.
- 5.21. 1) $\pm\frac{t}{2}$; 3) $\pm\frac{\sqrt{2k^2}}{8}$; 5) $\pm(c-1)$, $c \neq 1$.
- 5.22. 2) 49; 4) 6,25; 6) 20,25.
- 5.23. 1) 9; 3) 12,75; 5) 0,5.
- 5.24. 2) $3(x-3)^2-12$; 4) $4(x-4)^2-4$; 6) $1,5(x-0,5)^2-45,375$.
- 5.25. 1) -1; 9; 3) -3; 5) 1; 3; 7) 2; 4.
- 5.26. 2) -1,6; 1; 4) 0,5; 1,25; 6) -1,2; 2; 8) -2; 2,75.
- 5.27. 1) -3; 11; 3) -2,4; 2; 5) -0,95; 1,45.
- 5.28. 2) а) -4; 5; б) -7; 8; в) ни при каких.
- 5.29. 1) 5 и 6. 5.30. 2) 2.
- 5.34. 2) 2,5. 5.35. 1) -0,25.
- 5.36. 2) Не имеет корней; 4) имеет корни; 6) имеет корни; 8) не имеет корней.
- 5.37. 1) Имеет корни; 3) имеет корни; 5) имеет единственный корень; 7) не имеет корней.
- 5.38. 2) Не имеет корней; 4) имеет единственный корень; 6) имеет единственный корень; 8) имеет единственный корень.
- 5.39. 1) -2,5; 2; 3) $\frac{1}{3}$; 3; 5) $\frac{1}{2}$; 7; 7) 0,5.
- 5.40. 2) $\frac{3 \pm \sqrt{69}}{2}$; 4) $\frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$; 6) 1,6; 4; 8) $-\frac{1}{30}$; $\frac{1}{10}$.
- 5.41. 1) 2; 10; 3) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; 5) -2; -0,5; 7) 1,5; 3.
- 5.42. 2) 0,2; 1; 4) 16; 36; 6) -1; $2\frac{7}{15}$; 8) 0,2.
- 5.43. 1) -4; 5; 3) 1; 25; 5) 4; 7.
- 5.44. 2) -3; 5; 4) $-\frac{1}{3}$; 4; 6) -7; 6.

- 5.45. 1) Нет корней; 3) $-3\frac{2}{3}$; 2) 5) $-0,2$; 1,7; 7) -4 ; 0,5.
- 5.46. 2) 1,75; 4) 0; 2) 6) -2 ; 3.
- 5.47. 1) -12 ; -2 ; 3) ни при каких.
- 5.48. 2) 2; 3; 4) -1 ; 6.
- 5.49. 1) 25; 3) 0,6; 2) 5) 7.
- 5.50. 2) $\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2}$; 4) -1 ; $-\sqrt{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} \pm \sqrt{24-8\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{2(\sqrt{3}-2)}$.
- 5.51. 1) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$; $\sqrt{2} - \sqrt{6} - 4$; 3) $5\sqrt{2} + 4$; $-5\sqrt{2} - 13$.
- 5.52. 2) 0; $\frac{1}{6}$; 1; 4) 0; 4; 25.
- 5.53. 1) -2 ; -1 ; 4; 3) 0,5; $\frac{1}{3}$; 4.
- 5.54. 2) $-1,25$; 1; 4) $\frac{3}{5}$; $11\frac{124}{165}$.
- 5.55. 1) $\frac{-1 \pm \sqrt{29-4\sqrt{7}}}{2}$.
- 5.56. 2) Больше.
- 5.57. 1) $p < 1$; 3) $p < 0,25$; 5) $p > -25$.
- 5.58. 2) $p < 0,125$; 4) $p < 2,625$; 6) $p < 24,45$.
- 5.59. 1) 36; 3) ± 28 ; 5) $-\frac{2}{9}$.
- 5.60. 2) $-\frac{a}{2}$; $-a$; 4) $-1,5c$.
- 5.61. 1) -3 ; $5k$; 3) $k+1$; $2k-3$. 5.62. 2) -4 ; -6 или 4; 6.
- 5.63. 1) 4; 6; 8; 2) 9; 10; 11. 5.64. 1) 49; 2) 62.
- 5.65. 1) 3; 4; 2) 1; 2; 3. 5.66. 1) 29; 2) 9.
- 5.67. 1) 12; 2) 8. 5.68. 1) 10; 2) 36.
- 5.69. 1) 2; 2) 3; 3) 7; 4) 6. 5.70. 1) 2.
- 5.71. 1) 19; 2) 10.
- 5.72. 2) $(x-7)(x+5)$; 4) $(x-10)(x+6)$; 6) $(x+6)(x+19)$; 8) $(x-8)(x-9)$.
- 5.73. 1) $(x-1)(3x+1)$; 3) $(2x-1)(x-2)$; 5) $(5x+3)(3x+5)$.
- 5.74. 2) $(x-a)(x+2a)$; 4) $(x-6a)(x+4a)$.
- 5.75. 1) $\frac{1}{3}(3x-3+2\sqrt{6})(3x-3-2\sqrt{6})$; 3) $\frac{(4x+1)(x-25)}{5}$;
5) $\frac{1}{4}(2x+\sqrt{2}+\sqrt{10})(2x+\sqrt{2}-\sqrt{10})$.
- 5.77. 1) $\frac{x-4}{x-5}$; 3) $\frac{x-6}{2x+3}$.
- 5.78. 2) $\frac{y+5}{2y+1}$; 4) $-\frac{p+5}{p+6}$; 6) $\frac{k+3}{4k-5}$.
- 5.79. 1) Не существует; 1,5; -12 ; $1\frac{1}{3}$. 5.80. 2) 1.
- 5.81. 1) $\frac{2a}{a+3}$; 5.82. 2) 13; 42; 4) -17 ; 66; 6) 0; -15 ; 8) 42; 0.
- 5.83. 1) $1\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 3) 1,6; 0,6; 5) $-\frac{2}{3}$; $2\frac{2}{3}$; 7) 6,76; 0.

- 5.84. 2) Разные; 4) плюс; 6) разные; 8) минус.
 5.85. 1) Минус; 3) плюс; 5) плюс; 7) разные.
 5.86. 2) Нет корней; 4) минус. 5.87. 1) 18.
 5.88. 2) -21; 4) 0. 5.89. 1) 149; 3) 0,4; 5) 0,2.
 5.90. 2) 16,84; 4) 5,048. 5.91. 1) $404\frac{37}{81}$; 3) $-\frac{1}{27}$.
 5.92. 2) $x^2 - 8,2x + 16 = 0$; 4) $x^2 - 12,25 = 0$; 6) $x^2 - 18x + 81 = 0$.
 5.93. 1) $x^2 + 6x - 6 = 0$; 3) $x^2 - 8x - 12 = 0$; 5) $x^2 - 3x + 1 = 0$.
 5.94. Например, 2) $36x^2 - 5x - 1 = 0$; 4) $x^2 - 14x + 49 = 0$.
 5.95. 1) -2; 4) 3; 5) 8; 11; 7) -8; 6.
 5.96. 2) -4; 14; 4) 5; 8; 6) 1; 5613.
 5.97. 1) 3; 3) 8; 5) 5; 8. 5.98. 2) 5 и -3; 4) 5 и 3.
 5.99. 1) Нет; 3) нет. 5.100. 2) Да; 4) нет.
 5.101. 1) $5x^2 - 32x + 44 = 0$.
 5.102. 2) $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$;
 4) $\left(-\infty; -\frac{7+\sqrt{93}}{2}\right) \cup \left(-\frac{7+\sqrt{93}}{2}; \frac{-7+\sqrt{93}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{93}}{2}; +\infty\right)$;
 6) $(-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$.
 5.103. 1) $\left[8; \frac{9+\sqrt{129}}{2}\right) \cup \left(\frac{9+\sqrt{129}}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1]$; 5) $(2; +\infty)$.
 5.104. 2) ± 2 ; 4) 1; 5) 6) $-\frac{6}{7}$; 1; 8) нет корней.
 5.105. 1) 1; 1,5; 3) ± 3 ; 5) 0; 5. 5.106. 2) -8; 0; 4) -14; 4; 6) -1; 3,5; 8) -12,5.
 5.107. 1) $3\frac{1}{3}$; 7) 3) -24; 20; 5) -1,8; 5.
 5.108. 2) 6; 4) $\frac{10}{11}$; 5) 6) 2; $6\frac{2}{3}$. 5.109. 1) 1; 3) $-7\frac{1}{2}$; $-3\frac{2}{3}$; 2.
 5.110. 2) 5; 4) $1\frac{1}{3}$; 6) нет корней. 5.111. 1) -0,5; 3) 5.
 5.112. 2) $-4 \pm 3\sqrt{2}$; $-3 \pm \sqrt{5}$; ни при каких; ни при каких.
 5.113. 1) Нет; 3) 3. 5.114. 1) $8 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; 2) $18 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$.
 5.115. 1) 4,5 ч; 2) $2 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$.
 5.116. 1) За 10 мин; за 15 мин; 2) за 6 ч; за 9 ч.
 5.117. 1) 5 км; 6 км; 2) $10 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; $12 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$.
 5.118. 1) $12 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; $15 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; 2) $60 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; $80 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$.
 5.119. 1) $50 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; 2) $50 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$. 5.120. 1) 7; 2) 21.
 5.121. 1) 20; 2) 5. 5.122. 1) 10; 2) 60.
 5.123. 1) За 20 с; за 30 с; 2) за 15 с; за 20 с.
 5.124. 1) $14 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; позже; 2) на 1 ч 4 мин.
 5.125. 1) $75 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; $50 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$; 2) $7 \frac{\text{КМ}}{\text{ч}}$.
 5.126. 1) За 4 ч 48 мин; за 4 ч; 2) $5\frac{5}{9}$ ч, $4\frac{1}{6}$ ч.

- 5.127. 1) $80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $64 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) $50 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; $40 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
- 5.128. 1) 40; 48; 2) 31; 36.
- 5.129. 1) За 12 ч; за 8 ч; 2) за 6 ч; за 8 ч.
- 5.130. 1) За 6 ч; за 12 ч; 2) за 15 дней; за 10 дней; за 6 дней.
- 5.131. 1) 6 или 8; 2) 16.
- 5.132. 2) $\pm \sqrt{\frac{\sqrt{65}-3}{14}}$; 4) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\pm \sqrt{3}$; 6) $\pm \sqrt{\frac{11-3}{2}}$.
- 5.133. 1) ± 2 ; 3) нет корней; 5) $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- 5.134. 2) 0; $\pm \frac{1}{23}$; 4) 0; $\pm \frac{21}{8}$; 6) 0.
- 5.135. 1) ± 1 ; ± 2 ; 3) нет корней; 5) $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- 5.136. 2) Нет корней; 4) $\pm \sqrt{9 \pm 6\sqrt{2}}$.
- 5.137. 1) Нет.
- 5.138. 2) $(x^2-2)(x^2-12)$; 4) $(x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$;
6) $(x-6)(x-1)(x+1)(x+6)$.
- 5.139. 1) $(3x^2-1)(x^2-2)$; 3) $-(4x^2+3)(3x^2-2)$; 5) $-(x^2+1)(5x^2-4)$.
- 5.140. 2) $\frac{p^2-5}{p^2-6}$; 4) $\frac{y^2-16}{y^2-49}$.
- 5.141. Например, 1) $x^4+2x^2+3=0$; 3) $x^4-5x^2+4=0$.
- 5.142. Например, 2) $x^4-45x^2+324=0$; 4) $x^4-9x^2+18=0$;
6) $49x^4-1229x^2+100=0$.
- 5.143. 1) 0; 3) 0. 5.145. 1) $a > 36$; 3) $a > -20$.
- 5.146. 2) а) $k < -2\sqrt{21}$; б) $k = -2\sqrt{21}$; в) $k > -2\sqrt{21}$.
- 5.147. Например, 1) $x^4-61x^2+900=0$.
- 5.148. 2) 0; $\pm \sqrt{6}$; 4) $\pm \frac{1}{3\sqrt{5}}$; $\pm \sqrt{1,4}$.
- 5.149. 1) $\pm \sqrt{2}$; $\pm \sqrt{3}$; 3) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $2 \pm \sqrt{5}$.
- 5.150. 2) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$; 4) $1 \pm \sqrt{1+\sqrt{3}}$.
- 5.151. 1) -4; 3; 3) -3; 2.
- 5.152. 2) Нет корней; 4) 1; 8.
- 5.153. 1) ± 2 ; 3) $\pm \sqrt{10}$.
- 5.154. 2) $-\frac{6}{13}$; 0; $\frac{8}{11}$; 10; 4) $-2 \pm 2\sqrt{6}$.
- 5.155. 1) 1; 3) 7; 12; 5) 45.
- 5.156. 2) -2; 9; 4) нет корней.
- 5.157. 1) -1; 3) ± 3 ; 4.
- 5.158. 2) -4; 3; 4) -2; 5; 6) нет корней.
- 5.159. 1) -9; 1; $-4 \pm \sqrt{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 1; 5) 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{6}$.
- 5.160. 2) Нет корней; 4) нет корней; 6) нет корней; 8) 0.
- 5.161. 1) -6; 1; 2; 3; 3) -1; -0,4; -0,2; 0,4; 5) $\frac{9}{4}$; $-\frac{1}{2}$.

5.162. 2) 1; 3) 4) $\frac{5 \pm \sqrt{109}}{6}$; 6) $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$.

5.163. 1) 5; 3) 1; 5) -6; 5; 7; 7) -2; 1; 3.

5.164. 2) Нет корней; 4) ± 6 ; 6) $\pm \frac{5}{7}$; ± 1 .

5.165. 1) -1; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{\sqrt{38}-4}{2}$.

5.166. 2) $\frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 4) $-2 \pm \sqrt{2}$.

Глава 6

6.1. 1) Больше; 3) равны; 5) больше; 7) больше; 9) больше; 11) меньше.

6.2. 2) $\pm 0,2$; 4) $\pm 1,1$; 6) ± 16 .

6.3. 1) Принадлежит; 3) не принадлежит; 5) принадлежит; 7) не принадлежит; 9) принадлежит.

6.4. 2) (2; 4); 4) $(-\sqrt{7}; -7)$; 6) $(-2,4; 0)$; параболе принадлежат точки B, C, M.

6.5. 1) Да; 3) нет; 5) да.

6.6. 2) ± 3 ; 4) $\pm \sqrt{13}$; 6) $\pm 2\sqrt{3}$.

6.7. 1) Да; 3) нет; 5) да.

6.8. 2) 4), 6) $y = x^2$; а) (0; 0); б) I и II; в) $x = 0$; г) при всех, кроме $x = 0$; д) ни при каких; е) $x = 0$.

6.9. 1) $(-2; 2)$; 3) $x \neq 0$.

6.11. 1) Нет; 3) нет.

6.12. 2) $(-4; 64)$, $(4; 64)$; 4) $(-\frac{1}{14}; \frac{1}{49})$; $(\frac{1}{14}; \frac{1}{49})$; 6) нет.

6.13. 1) $(-6; -6)$, $(6; -6)$; 3) $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{54})$; $(\frac{1}{3}; -\frac{1}{54})$; 5) нет.

6.14. 2) $y = -3x^2$; 4) $y = -0,4x^2$.

6.15. 1) 5; 3) a — любое; 5) 0,25.

6.16. 2) $y = 8x^2$; 4) $y = x^2$.

6.17. 1) -4; 3) $-\frac{1}{9}$.

6.18. 2) $x < -1$; $x > 1$; 4) ни при каких.

6.19. 1) $x < -4$ и $x > 4$; 3) $-1 < x < 1$.

6.20. 1) $p \neq 2$; 2) $p = 2$.

6.21. $y = 6x^2$.

6.22. 2) $y = -\frac{1}{3}x^2$, $x \leq 0$; 4) $y = 0,25x^2$, $x \leq 0$.

6.24. Сдвиг вдоль оси Oy: 2) на 1 единицу вниз; 4) на 9 единиц вверх.

6.25. 1) $y = 7x^2 + 3$; 3) $y = 7x^2 - 7$; 5) $y = 7x^2 - 2,1$; 7) $y = 7x^2 + 0,9$.

6.26. 2) $y = -3,2x^2 - 4,6$; 4) $y = -3,2x^2 + 7$.

6.27. Сдвиг вдоль оси Oy: 1) на 6 единиц вверх; 3) на $\sqrt{3}$ единицы вниз.

6.28. 2) Растяжение вдоль оси Oy в 5 раз и сдвиг вдоль оси Oy полученной параболы на 6 единиц вниз; 4) сжатие вдоль оси Oy в 9 раз и сдвиг вдоль оси Oy полученной параболы на 49 единиц вверх.

6.29. 1) $(-3; -8)$, $(3; 8)$; 3) нет; 5) $(0,2; 1,2)$, $(1; 6)$; 7) $(-0,5; 1)$.

6.30. 2) Да; $(-\frac{1}{\sqrt{6}}; 0)$; $(\frac{1}{\sqrt{6}}; 0)$; 4) да; $(0; -1)$; 6) нет.

6.31. 1) Да; $(-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0)$; $(\sqrt{\frac{2}{3}}; 0)$; 3) нет; 5) да; $(-2; -10)$; $(2; -10)$.

- 6.32. 2) (0; 4); 4) (0; -3,2); 6) $(0; 8\frac{1}{3})$.
- 6.33. 1) (-2; 3), (2; 3); 3) (-2; -10), (2; -10); 5) (-3; 9), (3; 9).
- 6.34. 2) $y = x^2 - 3$; 4) $-x^2 - 1$.
- 6.35. 1) а) (0; 2); б) $x = 0$; в) вверх; г) нет; д) (0; 2); 3) а) (0; 5); б) $x = 0$; в) вниз; г) $(-\sqrt{5}; 0)$; $(\sqrt{5}; 0)$; д) (0; 5).
- 6.36. 2) 1; 4) -6,7. 6.37. 1) $y = -2x^2 + 1$, $x \leq 0$; 3) $y = -3x^2 + 3$, $x \geq 0$.
- 6.39. Сдвиг вдоль оси Ox : 1) на 3 единицы вправо; 3) на 5 единиц вправо; 5) на $\sqrt{7}$ единицы влево.
- 6.40. 2) $y = 2,3(x - 5)^2$; 4) $y = 2,3(x + 2,3)^2$.
- 6.41. Сдвиг вдоль оси Ox : 1) на 2 единицы вправо; 3) на 7,3 единицы влево.
- 6.42. Сдвиг вдоль оси Ox : 2) на 1 единицу вправо; 4) на 81 единицу влево.
- 6.43. 1) (-4; 4); (0; 4); 3) (0; 25); (3; 49).
- 6.44. 2) (2,5; 0); 4) (-0,8; 0); 6) (5; 0).
- 6.45. 1) $y = 0,25(x - 3)^2$; 3) $y = -0,75(x + 4)^2$. 6.46. 2) Нет; 4) нет.
- 6.47. 1) $x = -5$; 3) $x = 0$; 5) $x = -p$.
- 6.48. 2) а) Нет; б) нет; в) нет; 4) а) нет; б) нет; в) нет; 6) а) нет; б) нет; в) нет.
- 6.49. 1) 0,2; 3) $-\frac{5}{144}$; 5) $\frac{20}{121}$.
- 6.50. 2) $b > 0$; $c < 0$; 4) $b > 0$; $c > 0$; 6) $b < 0$; $c < 0$.
- 6.51. 1) Сдвиг вдоль оси Ox на 5 единиц вправо и вдоль оси Oy на 1 единицу вверх; 3) сдвиг вдоль оси Ox на 2 единицы влево и вдоль оси Oy на 7 единиц вниз.
- 6.52. 2) Сдвиг вдоль оси Ox на 2 единицы вправо и вдоль оси Oy на 5 единиц вверх; 4) сдвиг вдоль оси Ox на 9 единиц влево и вдоль оси Oy на 7 единиц вниз.
- 6.53. 1) $y = 7(x + 3)^2 - 2$; 3) $y = 7(x - 0,5)^2 + 5$.
- 6.54. 2) Ни при каких; 4) ни при каких.
- 6.55. а) (-1; -3); б) $x = -1$; в) вниз; г) нет; д) (0; -3,5).
- 6.56. 2) Сдвиг вдоль оси Ox на 1 единицу вправо.
- 6.57. 1) Сдвиг вдоль оси Oy на 5 единиц вниз; 3) симметрия относительно оси Ox и сдвиг вдоль оси Oy полученного графика на 10 единиц вверх.
- 6.58. 2) Сдвиг вдоль оси Oy на 9 единиц вниз; 4) симметрия относительно оси Ox и сдвиг вдоль оси Oy полученного графика на 16 единиц вверх.
- 6.59. 1) $x = 4$; 3) $x = -7$. 6.60. 2) (-3; -5); 4) $(\frac{1}{9}; \frac{1}{8})$; 6) $(c; -p)$.
- 6.62. 2) а) (4; 4); б) $x = 4$; в) вверх; г) нет; д) (0; 20); 4) а) (2,5; -2,5); б) $x = 2,5$; в) вниз; г) нет; д) (0; -8,75); 6) а) (-1,5; 5,5); б) $x = -1,5$; в) вниз; г) $(\frac{-3 \pm \sqrt{22}}{2}; 0)$; д) (0; 3,25).
- 6.63. 1) $y = (x + 2)^2 - 2$; а) (2; -2); б) $x = -2$; в) вверх; г) $(-2 \pm \sqrt{2}; 0)$; д) (0; 2); 3) $y = -(x - 2)^2 - 1$; а) (2; -1); б) $x = 2$; в) вниз; г) нет; д) (0; -5).
- 6.64. 2) Нет; 4) да. 6.65. 1) Нет; 3) нет. 6.66. 2) Да; 4) нет.
- 6.67. 1) -3; 1; 3) $\frac{9 \pm \sqrt{21}}{3}$. 6.68. 2) Ни при каких; 4) $p < 0$.
- 6.69. 1) а) Нет; б) нет; в) нет; 3) а) нет; б) нет; в) нет.

- 6.70. 2) $s < 0$; $t > 0$; 4) $s < 0$.
 6.71. 1) $y = (x + 10)^2 - 94$; 3) $y = -(x + 4)^2 + 19$; 5) $y = 4(x - 1,5)^2 - 1$.
 6.72. 2) $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$.
 6.73. 1) (0,5; 42,25); 3) (4,5; -0,25).
 6.74. 2) (-1,5; -16); (-3,5; 0); (0,5; 0); (0; -7); 4) (-2; -9); (-8; 0); (4; 0); (0; -8).
 6.75. 1) (-5; 0); (1; 0); (0; -2,5); 3) (-3,5; 0); (2; 0); (0; 14).
 6.77. 1) $y = 5(x + 0,7)^2 + 18,55$; 3) $y = -7\left(x + \frac{1}{14}\right)^2 - 6\frac{27}{28}$.
 6.78. 2) -4; 0; 4) -1; 23.
 6.79. 1) а) $0 < t < \frac{2}{3}$; б) $t < 0$, $t > \frac{2}{3}$; в) $t = \frac{2}{3}$; 3) а) $t < 0$, $t > \frac{1}{16}$; б) $0 < t < \frac{1}{16}$;
 в) $t = \frac{1}{16}$.
 6.80. 2) $p = -8$; $q = 16$; 4) $p = -4$; $q = 0$.
 6.81. 1) II или III; 3) II или III.
 6.82. 2) $m < 0$; $n > 0$; k — любое; 4) $m < 0$; $n < 0$; $k < 0$.

Материалы для повторения

1. 1) 0,35; 3) 1.
 2. 2) $\frac{1}{20}$; 4) $\frac{9}{49}$; 6) 256; 8) 625; 10) $\frac{1}{625}$; 12) $-\frac{512}{729}$.
 3. 1) $\frac{14}{1125}$; 3) $4\frac{63}{64}$; 5) 0. 4. 2) -2.
 5. 1) $\frac{m^6 x^2}{n^8 y^2}$; 3) $\frac{4a}{5y^4}$; 5) $\frac{13np^3tm}{6}$.
 6. 2) $-30a^4b^4c^4$; 4) $-\frac{3x^2y^2}{49z^9}$; 6) $-\frac{3a^3b^{15}}{24010mn}$; 8) $5\frac{1}{3}a^5mx$; 10) $-18x^4y^5z^2$.
 7. 1) $0,5a^8x^5y^2$; 3) $-\frac{1024}{3}b^{12}m^3n$.
 8. 2) $5a^2 + 16a + 20$; 4) $2b^2 - 20b + 2$; 6) $6ab$.
 9. 1) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$; 3) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 + 1)$.
 10. 2) $4(mn - 5)(mn + 5)$; 4) $-(5m + 4n)(m + 2n)$.
 11. 1) $(m - 3)^2$; 3) $(m^2 - 12)(m^2 - 2)$.
 12. 2) $\frac{6-c}{c}$; 4) $\frac{2pq - 4p^2}{2p + q}$; 6) $\frac{b}{2a^2}$. 13. 1) $\frac{a}{a+b}$; 3) $2a - 5$.
 14. 2) $\frac{x+3}{x-2}$; 4) $x - 2y$. 15. 1) $\frac{1}{a^2b}$. 16. 2) -20; 4) 5.
 17. 1) 25. 18. 2) $\frac{64}{625}$. 19. 1) $2\frac{14}{17}$.
 22. 2) -10; 4) 9; 6) 3,25. 23. 1) $-\frac{10}{41}$; 3) корней нет; 5) корней нет.
 24. 2) 5,75. 25. 1) 2; 3) $1\frac{2}{3}$. 26. 2) ± 4 ; 4) $2\frac{2}{3}$.
 27. 1) 18. 28. 2) $\frac{2}{3}$. 29. 98.
 30. 100 г. 31. 374. 32. 360.

33. 55 км. 34. $60 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. 35. 74.
 36. 57. 37. 30. 38. 20.
 39. 280. 40. 11. 41. 15.
 42. 1) $48 : (-2)$; $(-48) : (-8)$; $48 : 6$; 2) $-0,2 : 5$; $0,4 : 8$; $(-56) : (-7)$.
 43. 1) Больше; 2) меньше. 44. 2) Меньше; 4) меньше; 6) меньше.
 45. 1) Меньше; 3) больше; 5) больше. 46. 1) Да; 2) нет.
 47. 1) Нет; 2) да. 48. 2) $x < y$; 4) $x > y$.
 49. 1) Да; 3) нет; 5) да. 50. 2) Да; 4) да.
 51. 1) B; 3) C. 52. 2) Больше; 4) больше.
 53. 1) $a + 32$; $a + 2,9$; a ; b ; $b - 3\frac{1}{2}$; $b - 7,9$.
 54. 2) Да. 55. 1) Меньше; 3) меньше.
 56. 2) $-4 < k - p - 14$; 4) $k > p + 10$; 6) $p - 2 < k - 12$; 8) $k - 4 > p + 6$.
 57. 1) $(a - b)^2 > 7a - 7b$; 3) $a^3 - b^3 > 7a^2 + 7ab + 7b^2$.
 58. 2) $(a - b)^2 > 3 - 3ab + b^2$; 4) $a^2 + b^2 > 3 - ab + b^2$; 6) $a(a + b) > 3$.
 59. 1) Не всегда; 3) нет.
 60. 2) $3c^2km - 5c^2k < 2c^2kn + 8c^2k$; 4) $3ckmp^2 - 5ckp^2 > 2cknp^2 + 8ckp^2$;
 6) $3ck^3mp^2 - 5ck^3p^2 > 2ck^3np^2 + 8ck^3p^2$; 8) $-12cm + 20c > -8cn - 32c$.
 61. 1) $\frac{2-3x}{pt^2} > \frac{17y}{pt^2}$; 3) $\frac{2-3x}{k^3pt} > \frac{17y}{k^3pt}$; 5) $\frac{2-3x}{kpt^2} < \frac{17y}{kpt^2}$;
 7) $\frac{3x-2}{kpt} < \frac{17y}{-kpt}$.
 62. 2) Нет; 4) нет.
 63. 1) Одного знака; 3) одного знака. 64. 2) Нет.
 65. 1) Не всегда. 66. 2) $a^2 + b > t + 1$; 4) $3a^2 < 7m - 3$.
 67. 1) $\frac{4a}{a^2 - 16} > \frac{10}{b(b^2 - 4)}$.
 68. 2) Да; 4) да; 6) нет; 8) не всегда; 10) не всегда.
 71. 1) $-54 < -6c \leq -36$; 3) $12 \leq 3c - 6 < 21$; 5) $-3\frac{1}{2} \leq \frac{c}{4} - 5 < -2\frac{3}{4}$;
 7) $\frac{7}{9} < \frac{7}{c} \leq 1\frac{1}{6}$.
 72. 2) $1,1 < 0,5b - 0,3a < 1,9$; 4) $-21 < a^2 - b^2 < -7$; 6) $72 < a^3 + b^3 < 152$;
 8) $20 < \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}b^3 < 44\frac{3}{4}$.
 73. 1) 15; 3) 0. 74. 2) 1.
 75. 1) $-2\frac{2}{15}$; $2\frac{1}{2}$; 3) 0; 33. 76. 1.
 77. От 667 до 945. 78. 1) От 810 кг до 1140 кг; 2) от 5 до 95.
 79. От 555,9 г до 568,86 г. 80. От 20 до 30.
 81. 1) Да; 3) да; 5) да. 82. 2) Нет; 4) да; 6) да; 8) нет; 10) нет.
 83. 1) -9; 3) -3; 3; -9. 84. 2) $\pm a^5$; 4) $\pm b^7$; 6) $\pm t^{11}$.
 85. 1) $\pm 2a$; 3) $\pm a^2b^3$; 5) $\pm \frac{7}{6}$; 7) $\pm \frac{a}{b^4}$; 9) $\pm(a - b)$; 11) $\pm(a + 3)$.
 86. 2) ± 13 ; 4) ± 48 ; 6) ± 1 ; 8) ± 9 ; 10) ± 15 ; 12) ± 110 .

87. 1) Да; 3) да; 5) нет; 7) нет; 9) да; 11) да.
 88. 2) 8; 4) 0; нет; 4) 20; 10; нет; нет. 89. 1) Да; 3) нет.
 90. 2) Нет; 4) нет. 91. 1) Нет; 3) да.
 92. 2) 25; 4) 9; 6) 0,64; 8) 0,36. 93. 1) ± 5 ; 3) ± 7 ; 5) ± 11 ; 7) ± 12 .
 94. 2) 4; 6; 4) $-\frac{2}{3}$; 2) 6) $-1,5$; 2.
 95. 1) -3 ; 3) нет корней; 5) -49 ; 7) нет корней.
 96. 2) 4 см; 4) 1,3 см. 97. 1) 6 см; 3) 0,9 см.
 98. 2) $[-2; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$; 6) $(-\infty; 8)$.
 99. 1) 0; 12; 12; 18; 18; 3) 0,5; 0; 1; 1,25; 0,25.
 100. 2) Да; 4) да. 101. 1) 4; 1; 0; 9; 25; 3) 0,8; 0,1; 0; 2,7; 12,5.
 102. 2) $2\frac{6}{17}$; 4) $105\frac{15}{17}$. 103. 1) Нет.
 104. 2) Да.
 105. 1) Больше; 3) больше; 5) больше; 7) больше; 9) меньше.
 106. 2) Меньше; 4) больше; 6) больше.
 109. 1) $\sqrt{129}$; $\sqrt{114}$; $\sqrt{111}$; 3) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; $\sqrt{\frac{5}{13}}$; $\sqrt{\frac{4}{11}}$.
 110. 2) $[0; 0,16]$; 4) $(36; +\infty)$. 111. 1) $(-\infty; -23)$; 3) $[-5; 95]$.
 112. 2) $(-4; -3)$; 4) нет решений. 113. 1) Нет решений.
 114. 2) $(-\infty; -54) \cup (44; +\infty)$. 115. 1) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$; 3) $[-1; 3]$.
 116. 2) $x \neq -4$; 4) нет решений; 6) нет решений.
 117. 1) $x \neq -2$; 3) нет решений. 118. 2) Нет решений; 4) нет решений.
 119. 1) $(-\infty; -1,75) \cup (2,25; +\infty)$; 3) $(-4; \frac{2}{3})$.
 120. 2) $3x^2 - 7x - 10 = 0$; 3; -7 ; -10 ; 4) $x^2 + 7x - 2 = 0$; 1; 7; -2 .
 121. 1) Да; 3) нет. 122. 2) $\pm 0,8$; 4) $\pm \frac{5}{9}$; 6) $\pm 1,875$.
 123. 1) -3 ; $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 1,5; 5) $\pm \sqrt{21}$.
 124. 2) -10 ; 4) 4) -1 ; 9. 125. 1) -3 ; 4; 3) 2; 3; 5) $-\frac{4}{3}$; $\frac{2}{7}$.
 126. 2) ± 2 ; 4) $-0,4$; 0. 127. 1) $\pm \sqrt{7}$; 3) $\pm \frac{\sqrt{15}}{2}$.
 128. 2) $-\frac{2}{7}$; 3; 4) $-0,2$; 2; 6) $-2,5$.
 129. 1) -2 ; -10 ; 3) -6 ; 5) -3 ; -1 ; 7) -3 ; -7 ; 9) $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.
 130. 2) $-0,25$; 4) $-\frac{1}{3}$.
 131. 1) -59 ; 53; 3) $-5\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 5) $\frac{3 \pm \sqrt{9+32\sqrt{3}}}{8}$; 7) $\frac{2-5\sqrt{3}}{5}$; $\sqrt{3}$.
 132. 2) $\frac{1}{4}$. 133. 1) $(x-1)^2 - 9$; 3) $(x+2)^2 - 16$; 5) $(x-0,1)^2 + 2,49$.
 137. 1) $\frac{3}{7}$. 138. 2) 1. 139. 1) 0; 4; 3) $\frac{13}{14}$.
 140. 2) Если $k=p=0$, то x — любое; если $k \neq 0$, то $x = \pm \frac{p}{k}$; если $k=0$, $p \neq 0$, то корней нет; 4) если $t=0$, то корней нет; если $t \neq 0$, $c=0$, то x — любое; если $t \neq 0$, $c \neq 0$, то корней нет.
 141. 1) $\pm \sqrt{6b^2 + 2}$.

142. 2) Если $n = -\frac{4}{3}$, то x — любое; если $n \neq -\frac{4}{3}$, то корней нет.
143. 1) $-b$; $\frac{b}{3}$.
144. 2) $2k$; $4k$; 4) k ; $12k$; 6) $-6k$; k ; 8) k ; 1.
145. 1) $x^2 - 4x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$.
146. 2) -12 ; 1; 4) -3 ; 6) -7007 ; 1; 8) 6; 10) 1.
147. 1) Да; 3) да.
148. 2) $(x - 5)(3x + 8)$; 4) $(7x - 2)(3x + 4)$;
6) $\frac{1}{4}(2x + \sqrt{2} + \sqrt{34})(2x + \sqrt{2} - \sqrt{34})$.
149. 1) $\frac{x-5}{x-7}$; 3) $\frac{x+4}{2x-3}$; 5) $\frac{5}{3x-1}$; 7) $-\frac{t+7}{t+2}$.
150. 2) 3; 4) $\frac{2a}{a+1}$.
151. 1) $-1,5$; 0; 3) $\pm\sqrt{2}$; 0. 152. 2) 0,5; 1,5; 4) 0,6; 4; 6) -20 ; 40; 8) 4; 10) 1.
153. 1) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\pm\frac{\sqrt{7+\sqrt{57}}}{2}$; 5) $\pm\sqrt{\frac{12}{11}}$; 7) $\pm 3\sqrt{2}$.
154. 2) 0; ± 5 ; 4) 0; 6) ± 1 ; 8) $\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$.
155. 1) $(x - 5)(x - 2)(x + 2)(x + 5)$; 3) $(x - 1)(2x - 1)(x + 1)(2x + 1)$.
156. 2) $\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{129}}{32}}$. 157. 1) $\pm\frac{1}{2}$; ± 2 ; 3) ± 1 .
158. 2) -6 ; 2; 4) $-5,5$; $-1,5$; 6) -8 ; 0. 159. 1) 6; 3) 10.
160. 2) $-1\frac{1}{2}$; -1 ; $-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; 4) нет корней.
161. 1) $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$; $-1,5$; 1; 3) -3 ; 7. 162. 2) -2 ; 1; 4) 0,8.
163. 1) $-7 \pm \sqrt{61}$; -3 ; 1; 3) 25; 49; 5) 31; 44. 164. 2) -3 ; 1,5.
165. 1) -2 ; $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{5}$. 166. 2) 1.
167. 1) Сдвигом вдоль оси Ox на 1 единицу влево.
168. 2) $y = 2,3(x + 7)^2$; 4) $y = 2,3(x - 0,4)^2$. 169. 1) (1; 1); (2; 1).
170. 2) (0,75; 0). 171. 1) $x = p$; 3) $x = 0$.
172. 2) Сдвиг вдоль оси Ox на 8 единиц влево и вдоль оси Oy на 6 единиц вниз.
173. 1) $(-2; 6)$; 3) $(p; t)$. 175. 1) Да.
176. 2) Нет. 177. 1) Ни при каких; 3) $p > 0$.
178. 2) $y = (x - 6,5)^2 - 41,25$; 4) $y = -6(x + 1,5)^2 + 18,5$;
6) $y = -0,2(x + 12,5)^2 + 26,25$.
179. 1) (12; -36); 3) $(-17; -9)$; 5) $(-3,5; 30,25)$.
180. 2) $(-3; -4)$; $(-5; 0)$; $(-1; 0)$; (0; 5); 4) (7; 4); (5; 0); (9; 0); (0; -45).
181. 1) $(-4; 0)$; (2; 0); (0; -8); 3) $(-\frac{5}{3}; 0)$; $(-\frac{3}{5}; 0)$; (0; 15); 5) $(-11; 0)$;
 $(-4; 0)$; (0; -44).
184. 2) IV. 185. 1) $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; 3) $a > 0$; $b < 0$; c — любое.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Вершина параболы 228, 233
Ветви параболы 228
Внесение множителя под знак квадратного корня 132
Вынесение множителя из-под знака квадратного корня 131
Выражение подкоренное 95
- Дискриминант квадратного трехчлена 187
— — уравнения 172
Дробь бесконечная десятичная 57
— — — непериодическая 85
— — — периодическая 50
— конечная десятичная 50
- Знак арифметического квадратного корня $\sqrt{\quad}$ 96
— $>$ (больше) 5, 11
— $\geq$ (больше либо равно) 30
— $<$ (меньше) 5, 11
— $\leq$ (меньше либо равно) 30
Знаки неравенств противоположные 11
- Извлечение квадратного корня 97
Интервал 65
- Корень n -й степени 95
— квадратного трехчлена 187
— — — кратный 188
— — — уравнения 172
— — — кратный 188
— квадратный 95
— — арифметический 96
- Метод выделения полного квадрата 167
— замены переменной 216
- Неравенства одного знака 11
— равносильные 72
— разных знаков 11
Неравенство двойное 36
— линейное 74
— нестрогое 30
— с одной переменной (с одним неизвестным) 72
— строгое 30
— числовое 11
— — верное 12
- Отрезок 65
- Парабола 227, 230
Приближение действительного числа конечной десятичной дробью (десятичное приближение) 61
— с избытком 61
— с недостатком 61
Промежуток числовой 65
- Решение неравенства 72
— системы неравенств 80
- Система неравенств 80
Системы неравенств равносильные 80
Среднее геометрическое двух чисел 116
- Теорема Виета 191, 192
— , обратная теореме Виета 196, 197
- Уравнение биквадратное 215
— второй степени 161
— квадратное 161
— — неполное 161
— — приведенное 168
- Формула корней квадратного уравнения 172
Функция квадратичная (квадратная) 230
- Число действительное 57
— иррациональное 54, 58
— рациональное 52, 56

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов	3
------------------	---

Глава 1. Числовые неравенства

1.1. Сравнение чисел	5
1.2. Числовые неравенства	11
1.3. Свойства числовых неравенств, связанные с действиями сложения и вычитания	16
1.4. Свойства числовых неравенств, связанные с действиями умножения и деления	20
1.5. Сложение и умножение числовых неравенств	25
1.6. Строгие и нестрогие неравенства	30
1.7. Двойные неравенства	36
1.8. Доказательство неравенств	43

Глава 2. Действительные числа

2.1. Периодические дроби	50
2.2. Иррациональные числа	52
2.3. Действительные числа	56
2.4. Числовые промежутки	65

Глава 3. Неравенства с переменной

3.1. Неравенства с одной переменной (с одним неизвестным). Линейные неравенства	72
3.2. Система неравенств с одной переменной	80
3.3. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля	88

Глава 4. Квадратные корни

4.1. Корень n -й степени	95
4.2. Тождество $\sqrt{a^2} = a $	104
4.3. Квадратный корень из произведения	113
4.4. Квадратный корень из частного	123
4.5. Вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под знак корня	131
4.6. Некоторые примеры на действия с квадратными корнями	141
4.7. Числовые неравенства, содержащие квадратные корни	153

Глава 5. Квадратные уравнения

5.1. Квадратные уравнения. Частные случаи	161
5.2. Метод выделения полного квадрата	167
5.3. Формула корней квадратного уравнения	172
5.4. Использование квадратных уравнений при решении задач	182
5.5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	186
5.6. Теорема Виета	190
5.7. Теорема, обратная теореме Виета	196
5.8. Уравнения, содержащие переменную в знаменателе	200

5.9. Использование уравнений, сводящихся к квадратным, при решении задач	206
5.10. Решение уравнений методом замены переменной.....	215
▲5.11. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.....	222

Глава 6. Квадратичная функция

6.1. Функция $y = x^2$	227
6.2. Функция $y = ax^2$	230
6.3. Функция $y = ax^2 + c$	236
6.4. Функция $y = a(x - s)^2$	242
6.5. Функция $y = a(x - s)^2 + t$	248
6.6. Квадратичная функция	254
Приложения	263
Материалы для повторения	—
1. Упражнения для повторения вопросов арифметического и алгебраического материала курса математики 5—7-х классов	—
2. Текстовые задачи	267
3. Упражнения для повторения вопросов алгебры 8-го класса	273
Справочные материалы	293
Ответы	295
Предметный указатель	317

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 8 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения

3-е издание, переработанное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Н. М. Алганова*. Оформление *Е. Э. Агунович*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *М. И. Чепловодская*. Компьютерная верстка *Е. Ю. Гурченко*, *Г. А. Дудко*. Корректоры *В. С. Бабеня*, *Д. Р. Лосик*, *З. Н. Гришели*, *Т. Н. Ведерникова*, *А. В. Алешко*.

Подписано в печать 12.03.2010. Формат $60 \times 90^{1/16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 20 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 11,77 + 0,33 форз. Тираж 88 100 экз. Заказ 394.

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.

ЛИ № 02330/0494083 от 03.02.2009.

Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.

Ул. Красная, 23, 220600, Минск.

Правообладатель Народная асвета